

2022年8月17日

令和5年度（令和4年10月入学を含む）
北海道大学大学院理学院自然史科学専攻
（地球惑星ダイナミクス講座，地球惑星システム科学講座，
および地震学火山学講座）
博士前期（修士）課程入学試験

専門科目試験問題
試験時間 13:00 ～ 16:00

以下の注意事項をよく読むこと。

1. 問題冊子1冊（この冊子），解答用紙6枚，草案紙2枚を配布する。
2. 専門科目試験の問題は，Ⅰ 数学，Ⅱ 物理学，Ⅲ 化学，Ⅳ 地球科学Ⅰ（地球史・テクトニクス・堆積学），およびⅤ 地球科学Ⅱ（岩石学・鉱物学）の5分野から出題される。このうち，2分野を選択して解答せよ。
3. 各分野の出題は，例えばⅡ-1，Ⅱ-2のように，いくつかの問題からなる。解答の方法については，各分野の問題に与えられている指示をよく読むこと。
4. 解答は，Ⅱ-1，Ⅱ-2などの問題ごとに別々の解答用紙（1枚）を用い，指定された欄に，数学などの科目名，Ⅱ-1のように問題番号，そして受験番号を記入すること。氏名は記入しないこと。
5. 解答は解答用紙の裏面に及んでもよい。
6. 解答用紙，草案紙が足りないときは，試験監督者に申し出ること。
7. 解答用紙は選択した分野ごとに回収する。回収する解答用紙の枚数は，分野毎に3枚ずつである。解答の如何に関わらず受験番号を記入し，これらの枚数の解答用紙を必ず提出すること。なお，3分野以上にわたって提出しないこと。
8. 問題冊子と草案紙は持ち帰ってもよい。
9. 試験時間が終了し，監督員の指示があるまで退出することはできない。試験時間中，トイレや体調不良がある受験生は挙手の上，監督員に知らせること。

I 数学

以下の4問 (I-1, I-2, I-3, I-4) から3問を選択して解答せよ. 解答にあたっては, 結果だけでなく導出過程も記せ.

I-1 (選択)

以下の問題に解答せよ.

問題1 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

問1 行列 \mathbf{A} の固有値とそれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは1とせよ.

問2 $\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ が対角行列となるような2次正方行列 \mathbf{P} を示せ. また, この対角行列 \mathbf{K} を求めよ.

問3 行列 \mathbf{A} の指数関数は無限級数を用いて次のように定義される.

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

$e^{\mathbf{A}}$ を求めよ. ただし, \mathbf{I} は単位行列である.

問題2 行列 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

問1 行列 \mathbf{B} の固有値とそれに対応する固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは1とせよ.

問2 問1で求めた固有ベクトルのひとつを \mathbf{v}_1 とし, これと直交する大きさ1のベクトルを \mathbf{v}_2 とする. 正方行列 $\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ を用いて $\mathbf{L} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ を計算し, $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形となることを示せ.

I - 2 (選択)

関数列 $\varphi_i(x)$ は次の方程式に従うものとする.

$$\varphi_{i+1}(x) = \int_0^x (x-t)\varphi_i(t)dt + x$$

ただし, i は非負の整数とする. $\varphi_0(x) = x$ であるとき, 以下の問題に解答せよ.

問題 1 $\varphi_1(x)$ を求めよ.

問題 2 $\varphi_2(x)$ を求めよ.

問題 3 $\varphi_n(x)$ を x のべき級数で表せ. ただし, n は非負の整数とする.

問題 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ を初等関数で表せ.

I - 3 (選択)

位置 x および時間 t における変位 $u(x, t)$ に関する次の波動方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0) \quad (1)$$

ここで c は正の定数とする。以下の問題に解答せよ。

問題1 式(1)が無限区間 ($-\infty < x < \infty$) で定義される場合を考える。以下の問いに答えよ。

問1 独立変数 X, Y に対し, $X = x - ct, Y = x + ct$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0.$$

が成り立つことを示せ。また一般解は, 任意関数 ϕ および ψ を用いて,

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

と表せることを示せ。

問2 初期条件が以下のように与えられるとする。

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

このときの波動方程式の解は,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x - ct) + f(x + ct)\}$$

となることを示せ。

問題2 式(1)が半無限区間 ($0 < x < \infty$) で定義される場合を考える。初期条件および境界条件は, 次のように与えられるとする。

$$\text{初期条件: } \begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad \text{境界条件: } u(0, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

このとき, 波動方程式の解について, 以下の問いに答えよ。

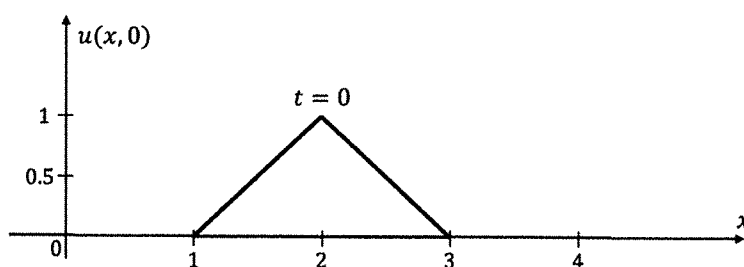
問1 $x \geq ct$ のときの解を求めよ。

問2 $x < ct$ のときの解を求めよ.

問3 関数 $f(x)$ が,

$$f(x) = \begin{cases} -1+x & (1 \leq x < 2) \\ 3-x & (2 \leq x \leq 3) \\ 0 & (x < 1, x > 3) \end{cases}$$

で与えられ, $c=1$ とする. $t=0$ での $u(x,t)$ は図のようになる. このとき, $t=1, 2$, および 4 での解 $u(x,t)$ を図示せよ.



I - 4 (選択)

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数) について考える. 以下の問題に解答せよ.

問題1 次の複素数を極形式で示せ.

$$(1) -i \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

問題2 $e^z = i$ を満たす z を求めよ.

問題3 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (u, v は実関数) について考える. 複素平面の領域 D 内で $f(z)$ が正則であるならば, 次の関係 (コーシー・リーマンの微分方程式) が成り立つ.

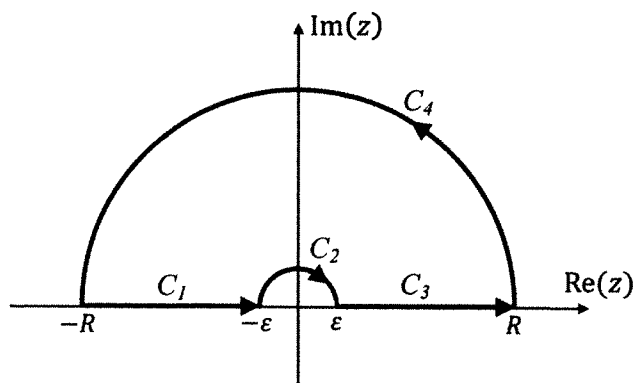
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

このとき, 領域 D 内の閉曲線 C に沿った $f(z)$ の積分は, $\oint_C f(z) dz = 0$ となることを示せ.

なお, 閉曲線 E で囲まれた領域 F における実関数 $P(x, y)$ および $Q(x, y)$ (それらの偏導関数は連続) に対して, 次の関係式が成り立つことを利用して良い.

$$\oint_E (P dx + Q dy) = \iint_F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

問題4 実積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ を求めよ. ここでは, 図に示すような積分経路 ($C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$) に沿って $f(z) = e^{iz}/z$ の複素積分を実行し, $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ とすればよい.



II 物理

以下の4問(II-1, II-2, II-3, II-4)から3問を選択して解答せよ. 解答にあたっては, 結果だけでなく導出過程も記せ.

II-1 (選択)

重力加速度 g が一定の重力場中で, 質量 m の質点を時刻 $t=0$ において静かに落下させる. 鉛直下向きを z 軸正方向として, 質点の落下速度を $v(t)$ とする. 落下速度の二乗に比例する空気抵抗力が作用する場合を考えると, 運動方程式は式(1)のように表される.

$$\frac{d}{dt}(\text{ア}) = (\text{イ}) - cv^2 \quad (1)$$

ここで, $c(>0)$ は抵抗係数である. このとき, 落下開始から十分な時間が経過すると重力と空気抵抗力が釣り合い, ある一定の落下速度(終端速度と呼ぶ)になる. 以下の問題に解答せよ.

問題1 空欄(ア)と(イ)にあてはまる適切な式を答えよ.

問題2 空気抵抗力が無視できる場合について, 以下の問いに答えよ.

問1 質量が変化しないとき, $t=0$ で高さ $H(>0)$ の質点が地面に到達したときの速度を求めよ.

問2 凝結によって質量 $m(t)$ を増加させながら落下する水滴の運動を考える. このときの水滴の落下速度は, 質量が変化しない場合の速度よりも遅くなることを示せ. ただし, 水滴は常に質点とみなせるとし, 凝結によって発生する熱は無視する.

問題3 質点の質量は変化せず, 空気抵抗力を考慮する場合について, 以下の問いに答えよ. 必要ならば, 以下の関係を利用すること.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cong \frac{(1+x) - (1-x)}{(1+x) + (1-x)} = x \quad (x \ll 1) \quad (2)$$

$$\frac{d(\operatorname{arctanh} x)}{dx} \cong \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (3)$$

- 問1 質点の終端速度を求めよ.
- 問2 質点の落下速度 $v(t)$ を求めよ.
- 問3 質点の落下開始直後で $m \gg cgt^2$ の関係を満たす場合を考える. このときの落下速度は空気抵抗力を無視した速度に近似できることを, 問2の結果を用いて示せ.

II-2 (選択)

真空中の時間変化がない磁束密度ベクトル \mathbf{B} と電流密度ベクトル \mathbf{i} の関係は、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1), \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} \quad (2)$$

と表される。 μ_0 は真空中の (ア) と呼ばれる。式(1), (2)は

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = (\text{イ}) \quad (3), \quad \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (4)$$

と積分形でも表される。ただし、 \mathbf{n} は閉曲面 S の外向き法線ベクトル、閉曲線 C は電流 I を取り囲む任意の閉曲線である。式(2)または(4)は (ウ) の法則と呼ばれる。(ウ) の法則から、電流素片ベクトル $I d\mathbf{s}$ に対して位置 \mathbf{r} に作る磁束密度ベクトル $d\mathbf{B}$ として

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (5)$$

という (エ) の法則が導かれる (図1参照)。以下の問題に解答せよ。

問題1 空欄 (ア) ~ (エ) にあてはまる適切な数式や用語を答えよ。

問題2 中心軸を z 軸とした半径 a の円形の導線に一樣な電流 I (z 軸正方向に向かつて時計回り) が流れているとき、 z 軸上の磁束密度ベクトル $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を考える。以下の問いに答えよ。

問1 図1のように $z=0$ に円形の導線を置く。式(5)の関係から B_x と B_y を求めよ。(ヒント: dB_x と dB_y について式(5)を円周に沿って角度 θ 方向に一周積分すればよい。または対称性からも求められる。)

問2 B_z が式(6)のように z のみの関数として表せることを示せ。

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6)$$

問3 問1と同じ円形の導線を2つ用意し、図2のように中心軸をそろえて b だけ離して平行に置く。ここで、2つの導線の重心を新たに原点 O とする。式(6)を用いて、2つの円形導線が作る z 軸上の $B_z(z)$ を求めよ。

問4 問3で原点 O の周辺 ($b/2 \gg |z|$) の $B_z(z)$ を z の2次式で近似せよ。ただし、 c を任意の定数として、原点 O の付近 ($c \gg |z|$) では、式(7)が成り立つことを利用せよ。

$$\frac{1}{\{a^2 + (c \pm z)^2\}^{3/2}} \cong \frac{1}{(a^2 + c^2)^{3/2}} \left\{ 1 \mp \frac{3c}{a^2 + c^2} z + \left[\frac{15}{8} \left(\frac{2c}{a^2 + c^2} \right)^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{a^2 + c^2} \right] z^2 \right\} \quad (7)$$

問5 問4の結果より, B_z が z によらずほぼ一定となる条件を求めよ.

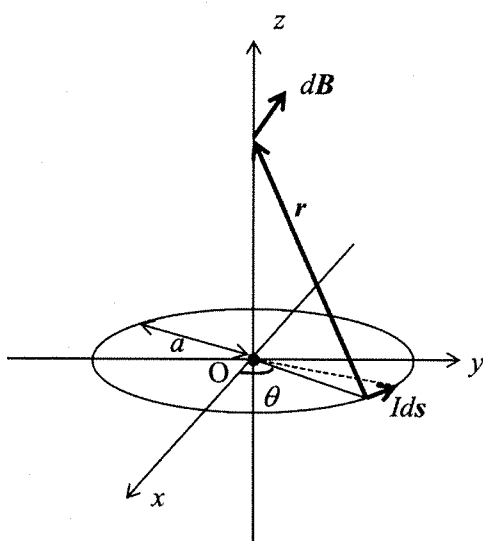


図1

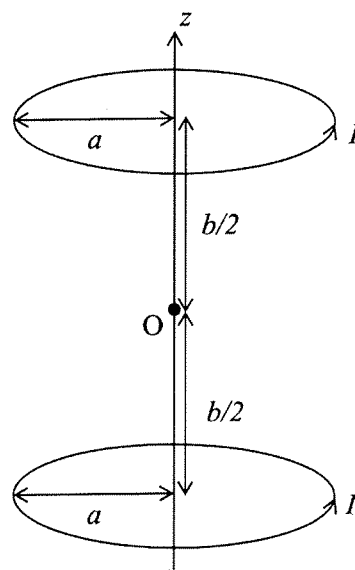


図2

II-3 (選択)

一定の重力加速度 g の下で (z 軸上向きを正とする), 温度 T (一定) の 1 種類の単原子分子からなり熱平衡にあって, 全体は静止している理想気体からなる気柱を考える. ここで, 分子 1 個の質量を m , 気柱内の分子数の合計は N 個とする. 以下の問題に解答せよ.

問題 1 下の図のようにごく薄い厚さの z から $z+dz$ の部分を考える. 圧力 $P(z)$ はその上にある気体の質量とみなすことができる. よって, この部分の上下面での圧力の差 dP は, 気体の密度を ρ とすると,

$$dP = -\rho g dz \quad (1)$$

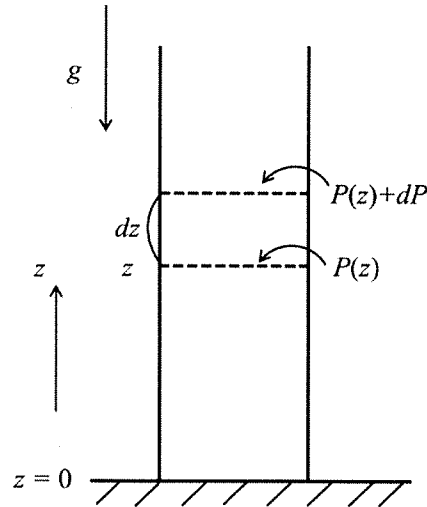
と表される. 一方, 密度 ρ と, 高さ z での分子数密度 $n(z)$ には

$$\boxed{\text{(ア)}} \quad (2)$$

の関係がある. また, 圧力 P と n には, 状態方程式より, ボルツマン定数 k と温度 T を用いて

$$P = \boxed{\text{(イ)}} \quad (3)$$

の関係がある. 以下の問いに答えよ.



問 1 空欄 (ア) と (イ) にあてはまる適切な式を答えよ.

問 2 式(1)~式(3)を用いて, 分子数密度の高度分布である式(4)を導け. ただし, n_0 を地表面 ($z=0$) での分子数密度とする.

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}z} \quad (4)$$

問3 問2の結果から、温度 T が 300 K で一定のとき、圧力が $z=0$ の $1/e$ になる高さを有効数字 2 桁で求めよ。ただし、気体の分子量は 30.0, アボガドロ定数 N_A は $6.00 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$ とする。

問題2 気体分子の速度ベクトル \mathbf{v} の分布は、分子の運動エネルギー $\frac{m}{2}v^2$ を用いたマクスウェル-ボルツマン分布に従う： $n(\mathbf{v}) \propto \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ 。これと式(4)より、問題1の気体の分子の速度-高度分布は、

$$n(\mathbf{v}, z) = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{mg}{kT}z\right) \quad (5)$$

と表される。ただし、 A は定数、 $v = |\mathbf{v}|$ である。以下の問いに答えよ。

問1 分子1個あたりの位置（重力）ポテンシャルは mgz なので、その平均値 h は、

$$h = \frac{1}{\int_0^\infty n(\mathbf{v}, z) dz} \int_0^\infty mgzn(\mathbf{v}, z) dz \quad (6)$$

で与えられる。式(6)より、 $h = kT$ で与えられることを示せ。

問2 式(6)の h と同様に、分子1個あたりの平均運動エネルギー κ は、

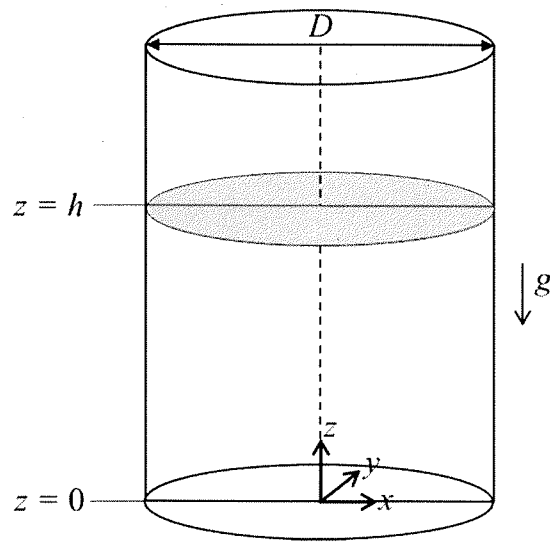
$$\kappa = \frac{1}{\iiint n(\mathbf{v}, z) d\mathbf{v}} \iiint \frac{1}{2}mv^2 n(\mathbf{v}, z) d\mathbf{v} = \frac{3}{2}kT \quad (7)$$

と計算できる。問1の結果と合わせて分子1個あたりの平均の全エネルギー ε を求めよ。ただし、式(7)の積分範囲は速度ベクトルの全空間である。

問3 問2の結果より、この気柱の全エネルギー E , および熱容量を求めよ。

II-4 (選択)

図のような容器内の体積一定の水を考える。水は非圧縮完全流体とする。図のように、容器は直径 D の円形断面を持ち、容器底面における円の中心位置を原点として位置を (x, y, z) で表す。 z 軸は鉛直上向きとし、重力加速度 g は一定で、 (x, y, z) 方向の水の流速成分は (u, v, w) とする。また、水面は大気と接し、大気圧は p_0 として表され、時間および空間的に変化しないものとする。容器と水が静止している場合の水面の高さを $z = h$ とする。以下の問題に解答せよ。



問題1 非圧縮完全流体の流体運動は、式(1), (2), (3)で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

ここで p は圧力、 ρ は水の密度、 t は時間である。式(1)の左辺の第1項と第2項の物理的な意味をそれぞれ簡潔に説明せよ。

問題2 式(3)を用いて、容器と水が静止している場合の容器内の水の圧力分布 $p(z)$ を求めよ。

問題 3 水全体が容器の中心軸のまわりを一定の角速度 ω で回転したとする。水は容器外へはこぼれ出ないものとし、以下の問いに答えよ。

問 1 容器底面に対する水面の角度を α とする。遠心力と重力のつりあいを用いてその角度を表せ。また、 $y=0$ の面において、角度 α と勾配 dz/dx の関係を表せ。

問 2 回転した定常状態での z 軸上の水面の高さを z_0 とする。問 1 の結果より、水面の高さ z を x の関数として表せ。

問 3 問 2 の結果を用いて、容器内の水の体積 V を z_0 の関数として求めよ。

問 4 容器内の水の体積は一定であることを利用して、静止していたときの元の水面の高さ h を求めよ。

問 5 水全体が一定の角速度 ω で回転しているときの水の流速は、以下のよう
に表される。

$$u = -r\omega \sin \theta \quad (4)$$

$$v = r\omega \cos \theta \quad (5)$$

$$w = 0 \quad (6)$$

ただし、容器の中心軸からの距離を r 、 x - y 平面上の x 軸からの角度を θ とする。これらの流速成分の渦度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を求めよ。

Ⅲ 化学

以下の3問(Ⅲ-1, Ⅲ-2, Ⅲ-3)すべてに解答せよ。

Ⅲ-1 (必須) 以下の文章を読み, 問題に解答せよ。

カラム容器に充填されたイオン交換樹脂に水溶液を通すことにより, 水溶液中にイオンとして溶存している元素を化学的に分離することができる。図1は, 岩石試料の $^{(a)}\text{Sr}$ 同位体比 ($^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$) を測定するにあたり, 硝酸溶液とイオン交換樹脂 X を用いて, 試料から Sr を単離する作業の概略を示したものである。化学処理を行った試料を硝酸溶液に溶かし(硝酸溶液 A), その溶液を樹脂 X に通す。すると Sr のみが樹脂 X に吸着され, それ以外の元素 (M) は溶液とともに樹脂 X を通過する。そして硝酸溶液 A とは硝酸濃度が異なる硝酸溶液 B を流すことによって, 樹脂 X に吸着していた Sr が回収される。単離した Sr 試料は, $^{(b)}$ 質量分析計によって質量数 84, 86, 87, 88 の同位体の存在度が測定される。

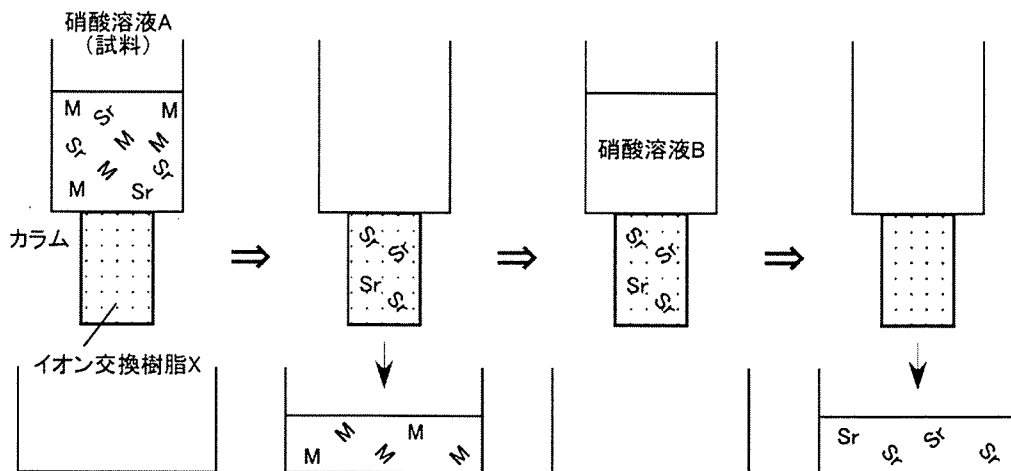


図1 Srの単離作業についての概略

- 問題1 下線部(a)の ^{87}Sr は ^{87}Rb の放射壊変により生じる。この壊変は何と呼ばれるのか, 答えよ。
- 問題2 下線部(b)の質量分析計において, 試料の Sr 同位体比 ($^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$) を正しく測定するためには, 図1の作業で回収される Sr 試料から Rb をほぼ完全に除去しておく必要がある。この理由を述べよ。

問題 3 図 2 は、Sr と Rb のイオン交換樹脂 X に対する容量係数 k' と、硝酸のモル濃度との関係を示したものである。ここで容量係数とは、対象元素について、共存する硝酸溶液に対してどのくらい樹脂 X へ分配されやすいかを表す指標であり、 $k' > 1$ ではより樹脂の方に、 $k' < 1$ ではより硝酸溶液の方に分配される。この図をもとに、Rb を極力含まずに、より高い回収率で Sr を単離するための、硝酸溶液 A と硝酸溶液 B の硝酸のモル濃度の組み合わせとして最も適切なものを、下の①～⑥から一つ選べ。

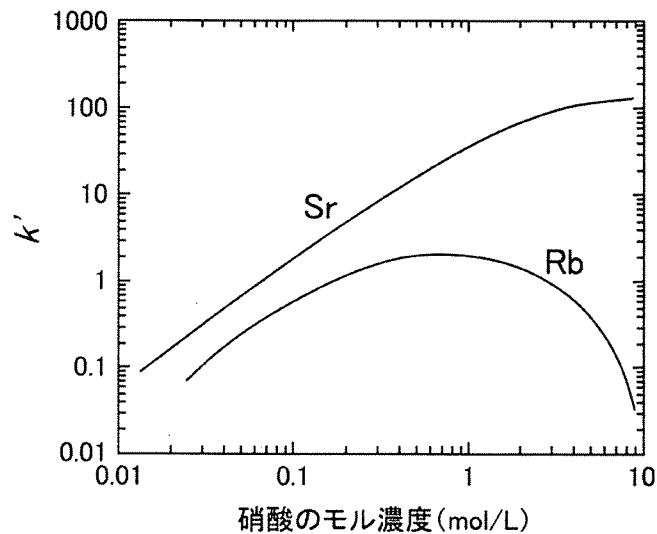


図 2 Sr と Rb のイオン交換樹脂 X に対する容量係数 k' と硝酸のモル濃度との関係

- ① A : 0.03 mol/L, B : 1 mol/L
- ② A : 1 mol/L, B : 0.03 mol/L
- ③ A : 0.03 mol/L, B : 8 mol/L
- ④ A : 8 mol/L, B : 0.03 mol/L
- ⑤ A : 1 mol/L, B : 8 mol/L
- ⑥ A : 8 mol/L, B : 1 mol/L

問題 4 硝酸は、工業的にはアンモニアを酸化することで製造される。①アンモニアと空気の混合気体を、約 800°Cにおいて (ア) を触媒として反応させると、一酸化窒素と水蒸気の混合気体となる。これを 140°C以下に冷却すると、一酸化窒素は酸化されて (イ) になる。この (イ) と水を反応させることで硝酸が生成される。このような硝酸の生成方法は (ウ) 法とよばれる。

- 問1 空欄 (ア) ~ (ウ) にあてはまる適切な語句を答えよ.
- 問2 下線部(c)の化学反応式を書け.
- 問3 図3は, ある市販の硝酸ボトルのラベルである. 1.38は密度 (g/cm^3), 63.01はモル質量 (g/mol), 61%は濃度 (質量分率%) を表す. この硝酸のモル濃度 (mol/L) を計算し, 有効数字3桁で答えよ. 導出過程も示すこと.

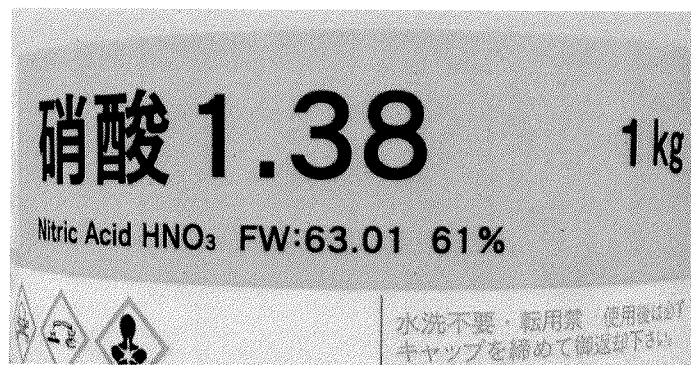


図3

- 問題5 250 mLの濃硝酸Cと750 mLの水をよく混ぜ合わせ, 1 Lの硝酸Dを作成した. ここから10 mLを分取し, 微量のフェノールフタレインを添加後, 1 mol/Lの水酸化ナトリウムを少しずつ加えていったところ, 26 mL加えたところで溶液の色が (エ) 色から (オ) 色に変わり, ほぼ中和されたことが確認された.
- 問1 空欄 (エ)・(オ) にあてはまる適切な語を答えよ.
- 問2 濃硝酸Cのモル濃度 (mol/L) を答えよ. 導出過程も示すこと.
- 問3 滴定用に10 mLを分取した残りの990 mLの硝酸Dに, 何 mLの水を加えると2 mol/Lの硝酸を作成することができるかを答えよ. 導出過程も示すこと.
- 問4 滴定作業をしている際に, 誤って濃硝酸Cが皮膚に付着し, しばらく気付かずに放置してしまった. このあと, 皮膚は何色に変色するのかを答えよ. また, その反応は何と呼ばれるのかを答えよ.

Ⅲ-2 (必須) 純物質の相境界に関する以下の問題に解答せよ。解答にあたっては、結果だけではなく導出過程も記せ。水素および酸素の原子量をそれぞれ 1, 16 とする。

- 問題 1 固相 (s) と液相 (l) が平衡に共存するとき、それぞれの化学ポテンシャル μ は等しいので、 $\mu_s(p, T) = \mu_l(p, T)$ となる。ここで、 p は圧力、 T は絶対温度である。相境界の勾配を dp/dT とする。この境界線上で融解が進んだ際の、両者の化学ポテンシャルの関係を説明せよ。
- 問題 2 固相と液相のモルエントロピーを $S_{s,m}$, $S_{l,m}$, モル体積を $V_{s,m}$, $V_{l,m}$ としたとき、それぞれの化学ポテンシャルの変化 $d\mu_s$, $d\mu_l$ を、 $S_{s,m}$, $S_{l,m}$, $V_{s,m}$, $V_{l,m}$, dT (温度変化), dp (圧力変化) を用いて、それぞれ表せ。また、固相が液相に相変化するときのモルエントロピー変化を $\Delta_{\text{melt}}S$ ($=S_{l,m} - S_{s,m}$), モル体積変化を $\Delta_{\text{melt}}V$ ($=V_{l,m} - V_{s,m}$) としたとき、相境界の勾配 dp/dT を表す式 (クラペイロンの式) が $\Delta_{\text{melt}}S / \Delta_{\text{melt}}V$ と表されることを示せ。
- 問題 3 圧力、温度一定の下で、固相が液相に相変化するときのエンタルピー変化を $\Delta_{\text{melt}}H_m$ としたとき、相境界の勾配 dp/dT を表す式を $\Delta_{\text{melt}}H_m$, T , $\Delta_{\text{melt}}V$ を用いて示せ。
- 問題 4 氷に圧力を加えると融ける。100 kPa ($=1.0 \times 10^5 \text{ J m}^{-3}$), 270 K において、0.01 kg の氷に、1.0 MPa の加圧をしたとき、融点の変化は -0.077 K であった。このときの氷の融解に伴う体積変化を有効数字 2 桁で答えよ。氷の融解エンタルピーは 6.0 kJ mol^{-1} である。
- 問題 5 30 m の高さの水銀柱がある。この水銀柱の底部では水銀の凝固点が何度変化するか、有効数字 2 桁で答えよ。水銀柱 1 m が与える圧力は 133 kPa, 水銀の融解エンタルピーは 2.29 kJ mol^{-1} , 凝固点は 234 K, 融解に伴う体積変化は $5.2 \times 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$ である。

III-3 (必須) 以下の問題に解答せよ。

問題1 以下の文章を読み、問いに答えよ。 $\ln(2) = 0.6931$ とする。

自然界の炭素には二つの安定同位体 ^{12}C と ^{13}C 、放射性同位体 ^{14}C が存在する。 (a)さまざまな物質を構成する炭素の安定同位体比 ($R = ^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$) には多様性があり、物質の移動や起源の追跡に利用される。 (b) ^{14}C は宇宙線由来の中性子と窒素の核反応により準定常的に大気へ供給され、一定の速度で壊変することから年代測定に利用される。

問1 下線部 (a) に関して、炭素の安定同位体比の δ 値 (単位 ‰) を定義する式を示せ。ただし、試料と標準物質の炭素安定同位体比をそれぞれ R_a , R_s とする。

問2 ある植物と大気二酸化炭素の炭素安定同位体比 ($^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$) の値は 0.0109225 と 0.0111473 のいずれかである。標準物質の炭素安定同位体比は 0.0112372 である。このとき、植物の炭素安定同位体比の δ 値を有効数字 3 桁で求めよ。

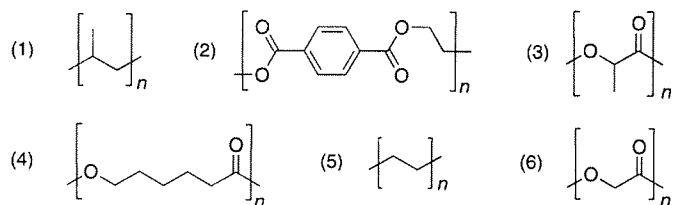
問3 下線部 (b) に関して、試料中の ^{14}C の原子数を P 、壊変定数を λ 、炭素について試料が閉鎖系となった時点からの経過時間を t とする。 $t=0$ のときの原子数を P_0 とすると、時間 t における P は、 $P = P_0 \exp(-\lambda t)$ とあらわすことができる。 ^{14}C の半減期を 5568 年とした場合の壊変定数 λ の値を有効数字 4 桁で求めよ。

問4 問3の P_0 は、実際には年代によって変化する。 P_0 を変化させる要因について 100 字以内で説明せよ。

問題2 以下の文章を読み、問いに答えよ

(c)ポリエチレンや(d)ポリプロピレンなどのプラスチックは分解されにくく、環境中に放出されると長期間滞留する。プラスチックゴミの問題、とりわけ、断片化した微小なプラスチック粒子による生態系への影響が懸念される中、(e)ポリ乳酸(PLA)などのバイオマス由来の生分解性プラスチックの利用も広がっている。PLAは、高温、水分、微生物、酵素などの好条件が揃った堆肥化条件下では短時間で加水分解されるが、自然環境下での分解速度は必ずしも大きくない。そのため、PLAがマイクロプラスチックの新たなソースとなる可能性も指摘されている。

問1 下線部(c)~(e)に対応するポリマーの構造を、次の図の(1)~(6)からそれぞれ一つずつ選べ。



問2 以下に挙げる下線部(c)のモノマーとその関連化合物のうち、(A)最も沸点が低いもの、および(B)最も沸点の高いものを選び、それぞれのケクレ構造式を示せ。また、以下の5種の化合物の化学組成についての共通点を簡潔に述べよ。

エチレン、酢酸、1,2-ジクロロエタン、アセトアルデヒド、エタノール

問3 PLAのモノマーである乳酸は、バイオマス由来の化合物Aの乳酸発酵により作られる(反応式： $C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2 C_3H_6O_3$)。化合物Aの名称を答えよ。また、化合物Aからなる高分子化合物を多く含むことでPLAの原料に適したバイオマスを次の中から一つ選べ。

廃食用油(動植物油脂)、ミールワーム(昆虫)、トウモロコシ(植物)

問4 PLAの製造過程には、2分子のヒドロキシ酸の互いの(n)ヒドロキシ基とカルボキシル基が脱水縮合してできる環状化合物(ラクチド)を作る工程がある。乳酸2分子から作られるラクチドが取り得る3種の立体異性体の構造式をそれぞれ示せ。

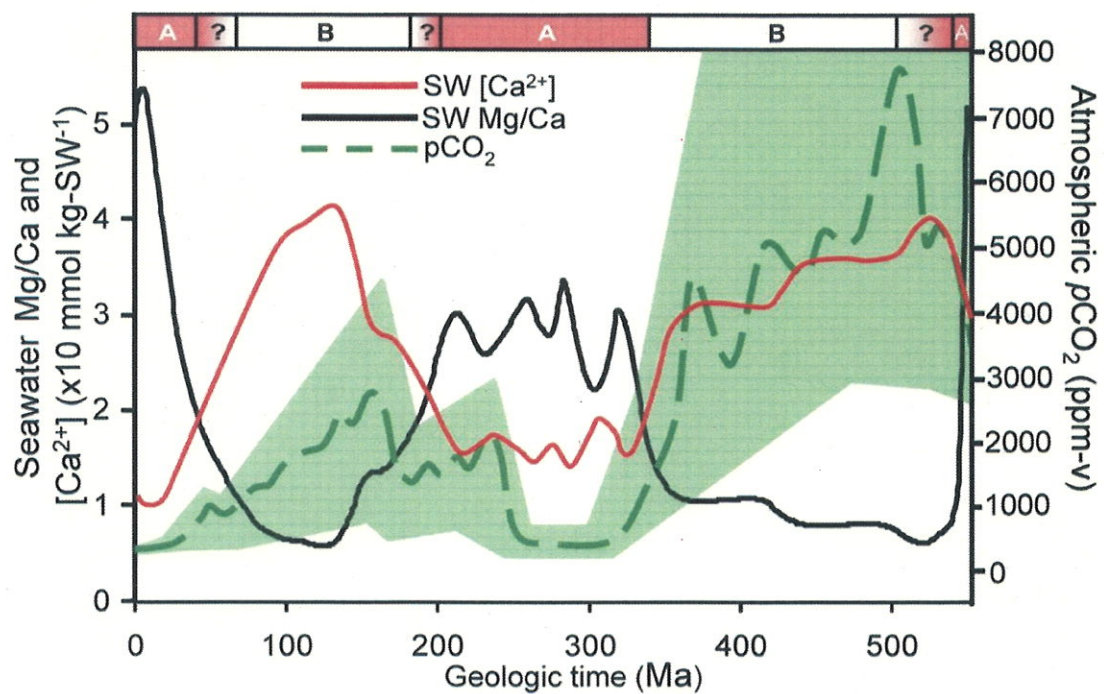
問5 問4の下線部(f)のようにしてできる結合を何というか。また、同様の結合をもつポリマーの構造を、問1の図の(1)~(6)から全て選べ。

IV 地球科学 I

以下の3問 (IV-1, IV-2, IV-3) すべてに解答せよ。

IV-1 (必須) 以下の文章を読み, 問題に解答せよ。

以下の図は顕生代における海洋の化学組成 (マグネシウムとカルシウムの比およびカルシウムイオン濃度) および大気中の二酸化炭素濃度 $p\text{CO}_2$, 当時の主な海洋生物の炭酸塩骨格の初生鉱物 (A と B) を示したものである。



(Ries, 2010, Bio geosciences を改変)

問題1 図中の A と B は, 化学式は同じだが結晶系が異なる炭酸塩鉱物である。それぞれの鉱物の名称を答えよ。

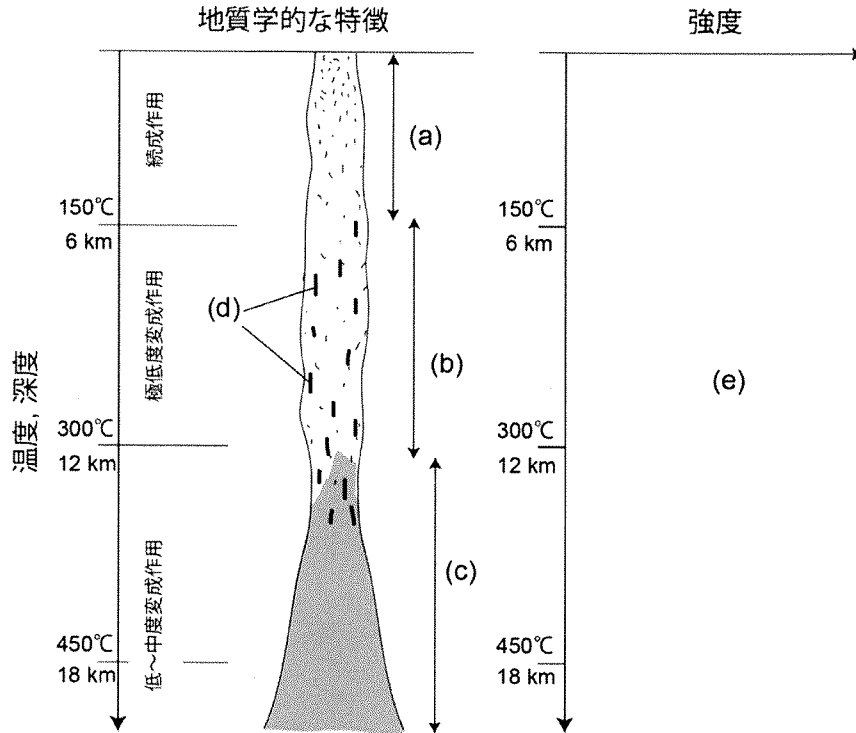
問題2 次の中から炭酸塩鉱物の骨格を形成する生物を3つ選べ。

有孔虫, 珪藻, 渦鞭毛藻, 円石藻, 造礁サンゴ, 硬骨海綿

- 問題 3 図から大気中の二酸化炭素分圧が高い時には海中のカルシウムイオン濃度が高い傾向にあるように見える。考えられる理由を 100 字程度で述べよ。
- 問題 4 海洋生物の化石を使って地質時代を特定することができる場合がある。そのような化石のことを何とというか、答えよ。また、そのような化石に必要な特徴を 20 字程度で答えよ。
- 問題 5 海洋生物の炭酸塩骨格の試料を用いて過去の環境を復元する研究が盛んに行われている。具体的な解析手法の一例を挙げ、その手法を基に明らかにできる環境を 150 字程度で述べよ。

IV-2 (必須) 以下の問題に解答せよ。

問題1 下の図は、大陸地殻に発達する断層帯の概念的なモデルを示している。以下の問いに答えよ。



(Sibson 1983, Fagereng and Toy 2011 を改変)

問1 図中の(a), (b), (c)のそれぞれに当てはまる断層岩の名称を以下から選んで答えよ。

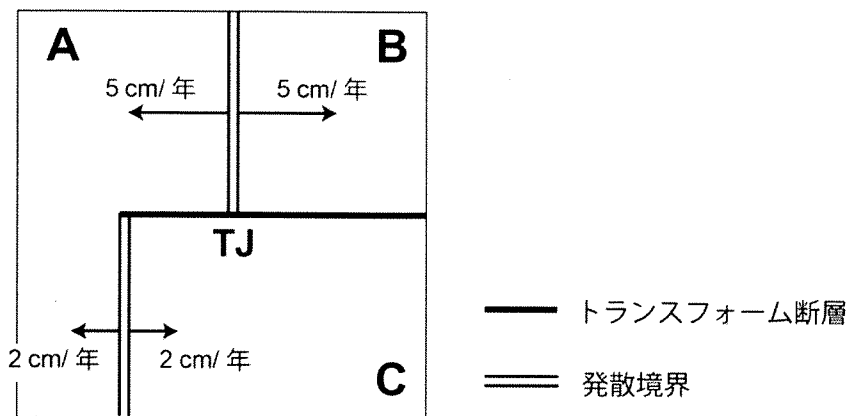
マイロナイト ガウジ カタクレースイト

問2 一般に(a)には断層活動に伴って形成される自生の粘土鉱物が豊富に含まれている。これらの鉱物の中には、K-Ar法によってその形成年代を測定できるものがあり、測定された年代はしばしば断層の活動時期の推定に利用されている。K-Ar法の測定対象となりうる粘土鉱物を以下から1つ選んで答えよ。

カオリナイト スメクタイト イライト ハロイサイト 緑泥石

- 問3 (b)および(c)が形成される環境では、ひずみの増加とともに構成鉱物の一つである石英結晶のサイズはどのように変化するか、(b)と(c)それぞれについて答えよ。また、そのようなサイズ変化はどのような機構でもたらされるか、それぞれ簡潔に答えよ。
- 問4 (d)に当てはまる‘地震の化石’とも呼ばれる断層岩の名称を答えよ。また(d)の形成過程を50字程度で説明せよ。
- 問5 (e)には地殻の強度と深さの関係が模式的に示される。深さなどを適宜示しながら、その関係を図示せよ。

- 問題2 下の図は、3つのプレートA, B, Cが交わる3重会合点(TJ)周囲のプレート境界の様子を示している。南北走向のA-BおよびA-Cのプレート境界は発散境界であり、片側発散速度はそれぞれ5 cm/年と2 cm/年である(発散方向は東西)。また、東西走向のA-CおよびB-Cのプレート境界はトランスフォーム断層である。ここでは、3つのプレートA, B, Cは平面上を運動しているとする。以下の問いに答えよ。



- 問1 A-Cのプレート境界でのトランスフォーム断層の運動は右横ずれ、左横ずれのいずれであるか、答えよ。
- 問2 プレートBから見たプレートCの相対運動の方向と速度を答えよ。
- 問3 プレートCから見た三重会合点の相対運動の方向と速度を答えよ。

IV-3 (必須) 海洋リソスフェアに関する以下の問題に解答せよ。

問題1 図1は地球物理学的手法で得られる海洋リソスフェアの平均的な地震波速度構造である。以下の問いに答えよ。計算問題では導出過程も記せ。

問1 Layer 1 ~ Layer 5 を主に構成している岩石の名称として最も適当なものを、表1から選んでそれぞれ答えよ。

問2 図1で示されている海洋地殻の厚さを答えよ。また、表1を参考に、その海洋地殻の平均密度を計算し、有効数字2桁で答えよ。

問3 図1で示されている海洋地殻の最上面は水深4000 mに位置しているとする。この海洋地殻と厚さ30 km、平均密度 2.8 g/cm^3 の大陸地殻との間にアイソスタシーが成立している場合、両者のモホ面の深さの差を計算し、有効数字2桁で答えよ。ただし、海水の密度は 1.0 g/cm^3 、マンツルの密度はどこでも 3.2 g/cm^3 であるとする。また、大陸地殻の最上面は海水面より上にあるとする。

問題2 海洋リソスフェアが陸上に上昇したものがオフィオライトであり、オフィオライトの研究を通して海洋リソスフェアの詳細な構造が明らかになってきた。図2にオフィオライトの産状を模式的に示す。オフィオライトには、ほぼ鉛直方向に発達する構造AとBが見られる。それらの形成過程をそれぞれ50字程度で答えよ。また、これらの構造がほぼ鉛直方向に発達する理由を30字程度で答えよ。

問題3 図3に、世界に分布するオフィオライト岩体の位置を示す。これらのオフィオライトはオブダクションと呼ばれる過程を経て陸上に上昇してきたと考えられている。図3のAA'とBB'で示す場所で生じたオブダクションの過程について、地下構造を図示しながらそれぞれ説明せよ。

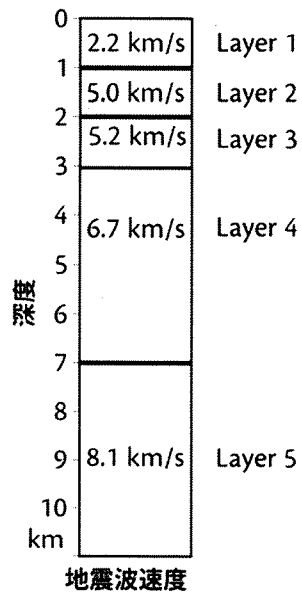


図1 海洋リソスフェアの地震波速度構造

岩石	密度 (g/cm ³)
チャート	2.1
蛇紋岩	2.5
流紋岩	2.4
トロンジェマイト	2.7
花崗岩	2.7
玄武岩	2.9
ドレライト	2.9
斑れい岩	3.1
デイサイト	2.5
輝石岩	3.1
かんらん岩	3.2

表1 岩石の名称と密度



図2 オフィオライトの産状
(Nicolas, 1991 を改変)

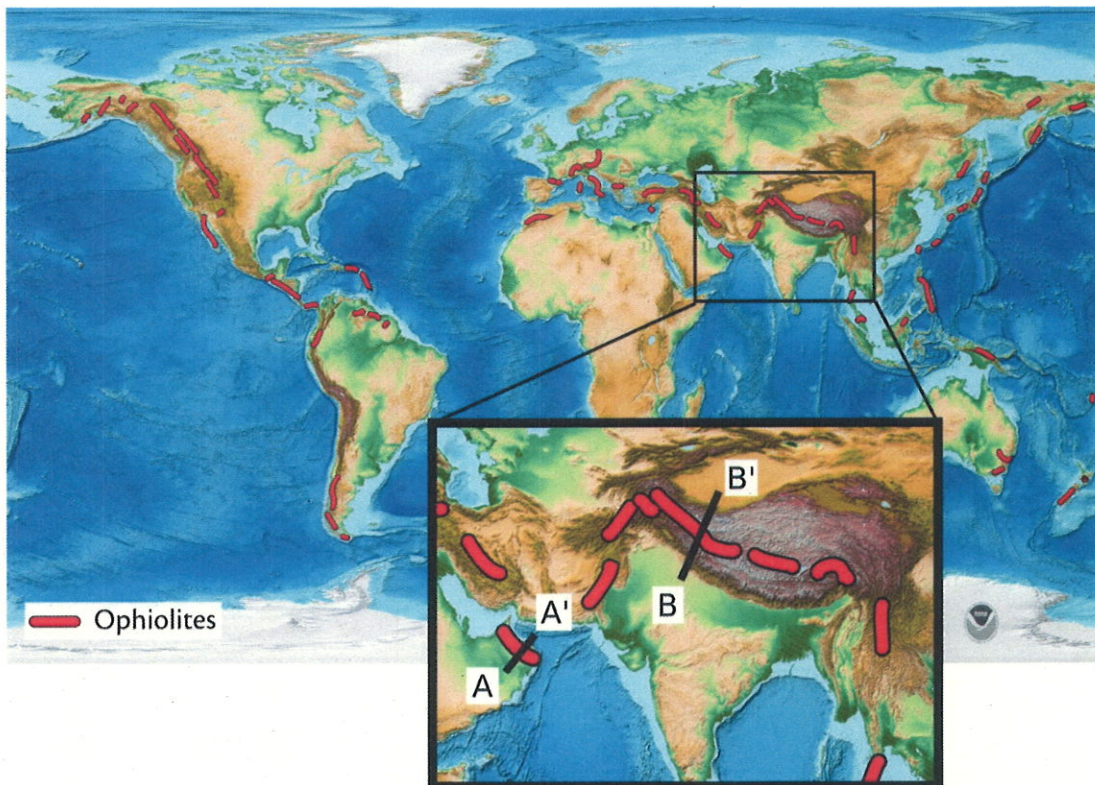


図3 オフィオライトの分布

V 地球科学 II

以下の3問 (V-1, V-2, V-3) すべてに解答せよ。

V-1 (必須) 以下の文章を読み, 問題に解答せよ。

中央海嶺は, 地球上で最も活発に火成活動が生じている場所である。その直下ではマントルを構成するかんらん岩が部分溶融を起こし, (ア) マグマを形成している。そして, (ア) マグマが冷えて固まることで, 海洋地殻が形成されている。海洋地殻の最上部では, (a) (ア) マグマが海水中に噴出し, 図1のように丸みを帯びた形状の溶岩を形成している。

中央海嶺で火成活動が生じる理由は, この場所がマントル対流の上昇部となっているためである。かんらん岩の上昇は断熱過程と近似することができる。これは, かんらん岩から熱が伝導で失われる時間が, かんらん岩の対流で熱が運ばれる時間よりも (イ) ためである。 (b) かんらん岩が断熱的に上昇すると温度がわずかに低下してゆくが, かんらん岩の融解温度も低下してゆくため, かんらん岩の温度はやがて融解温度を越え, 部分溶融が起こる。 (c) 沈み込み帯でもかんらん岩の部分溶融により (ア) マグマが形成されるが, その仕組みは中央海嶺でのマグマ形成とは異なる。

中央海嶺では海底熱水活動も盛んである。これは, 海底にしみ込んだ海水がマグマの熱で温められ, 再び海水中に噴出するためである。 (d) 噴出する熱水の化学組成は, 海水の化学組成とは異なる。 熱水は, (ウ) と呼ばれる構造物から放出されており, この構造物は鉛の硫化鉱物である (エ) や亜鉛の硫化鉱物である (オ) などから構成されている。

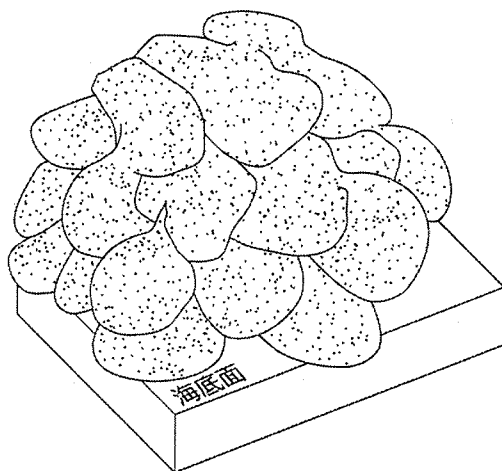


図1 下線部(a)の溶岩の模式図。丸みを帯びた溶岩が積み重なっている。

問題 1 空欄（ア）に当てはまる語句として最も適切なものを以下から1つ選び、答えよ。

玄武岩質 流紋岩質 かんらん岩質 デイサイト質

問題 2 空欄（イ）には、次のうちどちらが当てはまるか、答えよ。

長い 短い

問題 3 空欄（ウ）～（オ）に当てはまる語句として最も適切なものを以下からそれぞれ1つずつ選び、答えよ。

チムニー 脱ガスパイプ キンバライトパイプ 柱状節理
石膏 方解石 閃亜鉛鉱 方鉛鉱 黄鉄鉱 黄銅鉱 岩塩

問題 4 下線部(a)について、以下の問いに答えよ。

問 1 この溶岩の名称を答えよ。

問 2 この溶岩はどのように形成されるか、50字程度で説明せよ。

問題 5 下線部(b)について、かんらん岩が部分溶融しない深さまで断熱上昇する際、温度がどのように変化するかを考える。以下の問いに答えよ。

問 1 上昇するかんらん岩には、式(1)で表される断熱温度勾配が形成される：

$$\frac{dT}{dz} = \frac{gT\alpha}{c_p} \quad (1)$$

ただし、 T は温度、 z は深さ、 c_p はかんらん岩の定圧比熱、 g は重力加速度、 α はかんらん岩の体積膨張率である。

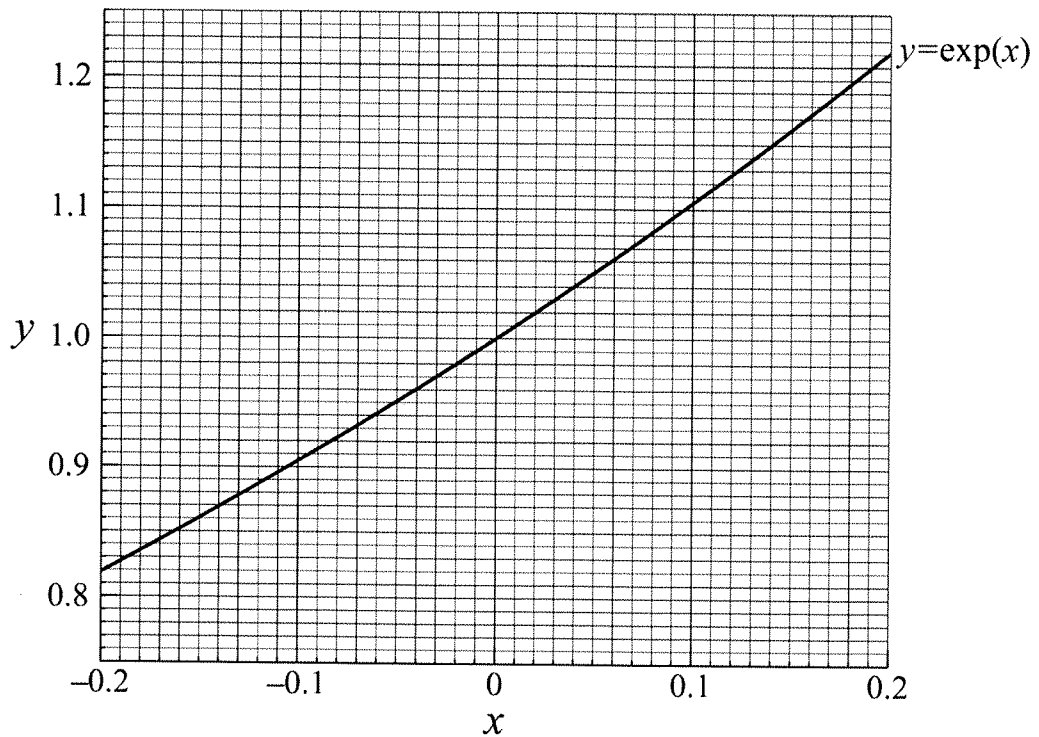
ある中央海嶺では、断熱上昇するかんらん岩の深さ 2.0×10^5 m における温度は 1700 K であった。この深さにおける温度勾配 $\frac{dT}{dz}$ [K m^{-1}] を計算し、有効数字 2 桁で答えよ。ただし、 $c_p = 1.0 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ 、 $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ 、 $\alpha = 4.0 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ とする。

問 2 式(1)を積分することで、深さ z_0 [m]、温度 T_0 [K] のかんらん岩が深さ z [m] まで断熱上昇したときの温度 T は

$$T = T_0 \exp\left[\frac{g\alpha}{c_p}(z - z_0)\right] \quad (2)$$

と表されることを示せ。

- 問3 深さ 2.0×10^5 m に存在する温度 1700 K のかんらん岩のポテンシャル温度を式(2)を用いて計算し，有効数字2桁で答えよ．ただし，ポテンシャル温度とは，ある深さのかんらん岩が地表まで部分熔融せずに断熱上昇すると仮定したときに期待される温度である．かんらん岩の体積膨張率，定圧比熱，重力加速度の値には，問1で示された値を用いること．計算にあたっては，下のグラフ ($y = \exp(x)$ のグラフ) を用いてもよい．



- 問題6 下線部(c)について，沈み込み帯ではどのような仕組みでかんらん岩の部分熔融が起きているか，60字程度で答えよ．
- 問題7 下線部(d)の原因にはいくつかの可能性が考えられる．そのうちの1つについて，20字程度で答えよ．

V-2 (必須) 以下の文章を読み、問題に解答せよ。

主要な造岩鉱物の1つである輝石は、図1のように、(a)SiO₄四面体が鎖状に連なり、それらの鎖を金属陽イオンが結びつける結晶構造をもつ。(b)金属陽イオンが占めるサイトには、M1サイトとM2サイトが存在し、M1サイトのほうが一般的にやや小さい。これらのサイトへ多様なイオンが入ることにより複雑な相関係が生じ、(c)さまざまな離溶組織が形成される。

問題1 下線部(a)に関連して、以下の問いに答えよ。

問1 SiO₄四面体の結合様式に基づく分類では、下線部(a)のような構造をもつケイ酸塩鉱物のことを何というか、答えよ。

問2 角閃石も、問1のグループに属するが、SiO₄四面体の鎖の構造が輝石とは異なる。どのように異なるか、簡潔に説明せよ。またその結果、両者のへき開の方向には違いが見られるが、どのように違うか、説明せよ。

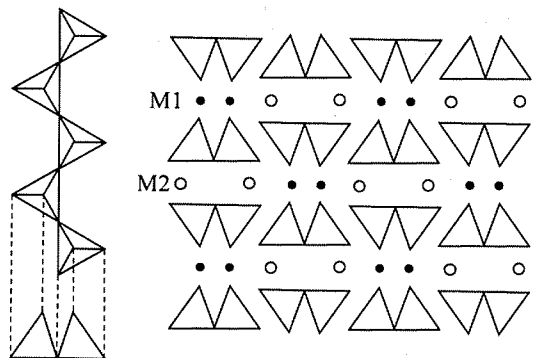


図1 輝石中に見られるSiO₄四面体の鎖状構造(左)と鎖の連なり方向から見た結晶構造(右)の模式図。

問題2 下線部(b)の金属陽イオンが占めるサイトについて、以下の問いに答えよ。

問1 M1サイトの周囲の酸素原子をむすんだ多面体は、ほぼ正八面体を形成する。M1サイトを占める金属陽イオンの配位数の値を答えよ。

問2 すべてのサイトをMg²⁺が占める場合の鉱物名と化学式を答えよ。

問3 Ca²⁺は、M1とM2のどちらのサイトを選択的に占めるか、答えよ。

問4 このようなサイトにおいて、結晶構造を変えずに原子の置換が起こることによってできる、ある範囲にわたって化学組成が連続的に変化する結晶相のことを何というか、答えよ。

問題3 下線部(c)の離溶について、以下の問いに答えよ。

問1 母相と離溶相の構造が異なる場合、離溶相は核形成過程を経て成長する。一般的な核形成過程として、温度の低下によりA相からB相に安定相が変化し、図2に示すようにA相中にB相が核形成することを考えよう。このとき系全体の自由エネルギーは、以下の3つの要因で変化する。(i) A相がB相に変わることによる減少、(ii)界面が生じることによる増加、(iii) B相中にひずみが生じることによる増加。

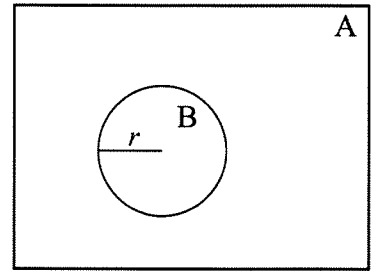


図2 核形成の模式図

A相とB相の単位体積あたりの自由エネルギー差の絶対値が $\Delta\mu$ [J m^{-3}], 単位面積あたりのA-B相間の界面エネルギーが σ [J m^{-2}], B相に生じる単位体積あたりのひずみエネルギーが U [J m^{-3}]で一定であるとき、図2のような半径 r [m]の球状のB相がA相中に形成したときの系全体の自由エネルギー変化量 ΔG [J]を、 $\Delta\mu$, σ , U を用いて表せ。

問2 B相は、 r がごく小さい間は、 r が大きくなるほど自由エネルギー ΔG が増大するために、大きくなりにくい。しかし、ある値を超えると r が大きくなるほど自由エネルギー ΔG が減少に転じるような臨界半径 r_0 が存在し、それより大きくなれば、結晶核は安定的に成長することができる。このような臨界半径 r_0 の値を $\Delta\mu$, σ , U を用いて表せ。導出過程も示すこと。

V-3 (必須) 以下の文章を読み、問題に解答せよ。なお、計算問題は有効数字3桁で答えよ。必要に応じて以下の数値を用いよ。

$$\sqrt{2} = 1.41, \sqrt{3} = 1.73, \sqrt{5} = 2.24$$

純鉄 (Fe) は常温常圧では体心立方格子構造 (α 相) が安定であるが、常圧で温度を 910°C 以上まで上げると、面心立方構造 (γ 相) に変化する。常温で約 10 万気圧以上では六方最密構造 (ϵ 相) が安定になる。

問題 1 α 相、 γ 相、 ϵ 相のように、化学組成は同じだが結晶構造が異なる相の関係を何と呼ぶか、答えよ。

問題 2 α 相、 γ 相の単位格子中に存在する原子の数をそれぞれ答えよ。

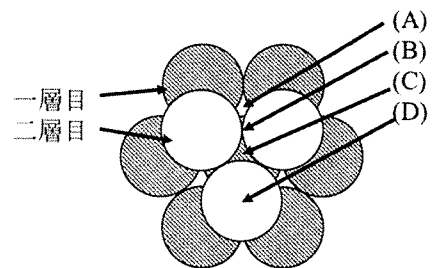
問題 3 α 相の粉末 X 線回折測定の結果、結晶格子面(200)の面間隔 d_{200} は 1.43 \AA であると求められた。以下の問いに答えよ。

問 1 α 相の格子定数 $a [\text{\AA}]$ を求めよ。

問 2 鉄原子が球体であり、結晶構造中で最近接原子が互いに接するように配置されていると仮定したとき、 α 相における鉄の原子半径 $[\text{\AA}]$ を求めよ。

問題 4 α 相と γ 相の充填率 [%] をそれぞれ求めよ。導出過程も示すこと。

問題 5 右図は六方最密構造における原子の積み重なり方を表している。二層目の上に三層目の原子を積み重ねるときに、図中の(A)~(D)のどこに原子がくるか、適切なものを1つ選べ。



問題 6 地球の内核は鉄-ニッケル合金からなり、その結晶構造は六方最密構造であると一般的に考えられている。しかし、観測により求められた内核の密度は鉄-ニッケル合金の密度に比べて数%小さい。このような現象が見られる理由として、どのようなことが一般的に考えられているか、20 字程度で答えよ