「宇宙測地学」（地球惑星計測学）中間試験問題(2012.12.21)

*解答用紙に何番の解答かを示せば，解答順序は問わない．

1. デカルト座標(x,y,z)系でのスカラー関数 Φ に関するラプラス方程式を書け．
2. 位置の関数である重力ポテンシャル $W(x,y,z)$と重力加速度ベクトル$\vec{g}$の関係について以下の問に答えよ．(1)$W(x,y,z)$の全微分 $dW(x,y,z)$が，ベクトル$\vec{g}$と微小変位ベクトル$d\vec{x}=(dx,dy,dz)$の内積で表せることを導け（途中の式も書くこと）．(2)$dW=0$ の面は等ポテンシャル面であるが，ジオイドとはどんな等ポテンシャル面のことか．(3)正標高 H が重力ポテンシャル値の二点間の差とその間の平均重力値で表せることを導け．ヒント：問(1)の結果を利用して，ベクトル$\vec{g}$と$d\vec{x}$を反対向きにとること．
3. 1841 年から使われていた Bessel 楕円体に基づく日本測地系は 2002 年 4 月から GRS80 楕円体に基づく世界測地系に変更された．関連する以下の問に答えよ．(1)赤道半径を a，極半径を b とする回転楕円体の式を書け．ただし赤道面内に xy 軸，この面に直交する方向を z 軸とする．(2)楕円体上のある点 P（緯度 ϕ，経度 λ とする）の三次元座標 x,y,z の三成分を卯酉線半径 N，緯度 ϕ，経度 λ を用いて表せ．
   ただし$N=a^2/\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}$とする．(3)現実の地上の点 Q は楕円体高 h の高さにあり，また点 Q の標高は H でもある．楕円体高 h と標高 H の関係を説明せよ．
4. 質量 M，半径 R の天体の重力ポテンシャル W を，この天体に原点をもつ球座標(動径 r，緯度 ϕ，経度 λ)で表現すると，ルジャンドル陪関数$P_{nm}(\sin\phi)$を用いて次式のようにストークス係数C_{nm},S_{nm}で展開される：

$$W=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n\left(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\phi).$$

   ただし，C_{nm},S_{nm}は次のように求められる：δ_{0m} は m=0 の時 1,それ以外のときは 0 であることを示すクロネッカー記号で，0!=1 とする．

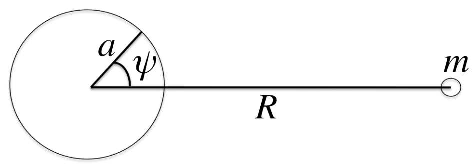
$$\begin{Bmatrix}C_{nm}\\S_{nm}\end{Bmatrix}=\frac{2-\delta_{0m}}{MR^n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iiint(r')^nP_{nm}(\sin\phi')\begin{Bmatrix}\cos m\lambda'\\\sin m\lambda'\end{Bmatrix}dM$$

   C_{nm},S_{nm}の低次項は物理的な意味を持ち，特にC_{20}は慣性モーメントと関連づけられることを示せ．ただし$P_{20}(\sin\phi)=\dfrac{1}{2}(3\sin^2\phi-1)$を利用し，$x,y,z$ 軸の周りの慣性モーメントをそれぞれ A,B,C とせよ．ここで$A=\iiint(y^2+z^2)dM$，$B=\iiint(z^2+x^2)dM$，$C=\iiint(x^2+y^2)dM$である．
5. 三次元 xyz 座標系の回転を考える．z 軸の周りに xy 座標系を反時計回りに γ だけ回転

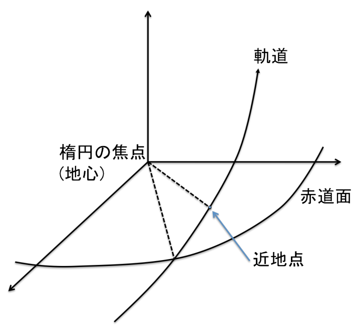
させるための回転行列を $R_3(\gamma)$, x 軸の周りに yz 座標系を反時計周りに α だけ回転させるための回転行列を $R_1(\alpha)$ と記す．以下の問に答えよ．(1)行列 $R_3(\gamma)$ を具体的に記せ．(2)行列 $R_1(\alpha)$ を具体的に記せ．(3)行列の積 $R_3(\gamma)\,R_1(\alpha)$ と $R_1(\alpha)\,R_3(\gamma)$ は等しいかどうか，調べて答えよ．

6. 以下の(ア～オ)に当てはまる語句や数値を答えよ．1 秒の定義はかつて，24 時間(=3600 秒×24=86400 秒)を 86400 で割った量として定義されていたが，24 時間とは仮想的な平均太陽の（ア）から（ア）までの時間であり，地球の自転周期（イ）そのものではない．地球の自転周期（角速度）は太陽ではなく（ウ）の観測から得るものであり，（ウ）の観測で決める時刻を Universal Time(UT)とよぶ．UT の観測から 1930 年代には一日の長さが経年的に長くなっていることが認識された．現在の 1 秒の定義は（エ）原子の特定の放射周期を利用した半永久的に不変な量になっているが，それでも地球の自転は遅くなっているため，UT そのものを時刻系にすると（ア）時刻がズレてきてしまう．そこで数年に一度（オ）が導入される．

7. 右図のような半径 a の天体が，距離 R だけ離れた質量 m の衛星から受ける潮汐力は潮汐ポテンシャル $U=-\dfrac{Gma^2}{2R^3}\left(3\cos^2\psi-1\right)$ から求めることができる．(1)動径方向の潮汐力は $-\dfrac{\partial U}{\partial a}$ から求められることを利用して，潮位(潮汐力)を縦軸に，位置 ψ を横軸にして図示し，分かることを述べよ．(2)弾性体の惑星の潮汐変形は，潮汐ポテンシャル U，地表重力 g，ラブ数 h から計算できる．ラブ数が無次元であることとポテンシャル U と重力 g の次元(単位)を考慮して，動径方向の変位 u_r の表式を求めよ．



8. 慣性空間に固定された座標系に対する衛星軌道は，軌道要素（ケプラー要素）を用いて記述される．右図は衛星軌道面と赤道座標の関係を示す．この図を写して，(1)近地点引数 ω，(2)軌道傾斜角 i，(3)昇交点経度 Ω を示せ．(4)様々な地球同期軌道のうち，北半球での滞在時間が長くなるような軌道を考えて，衛星軌道面と赤道座標を図示せよ．このとき近地点はどの辺りになるかも示せ．



9. 札幌市のある水準点の 5 年間の標高データ $(t_1,h_1),(t_2,h_2),...,(t_5,h_5)$ が与えられているとき，これら 5 組のデータを時間の一次関数 $h=at+b$ で近似したい．年変化率 a と切片 b を最小二乗法で推定するとして，a と b のそれぞれの値を 5 組のデータから求める式を導け．