「宇宙測地学」中間試験問題(2014.12.5)

1. 球座標で定義されたラプラス方程式は，変数分離によって一般解を得る．動径方向の関数 $R(r)$が満たす微分方程式は，便宜的に $n(n+1)$を定数として $\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=n(n+1)$ である．以下の問に答えよ．(1) $R(r)=Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}$ が一般解であることを確かめよ．ただし，A と B は定数とする．(2) 関数 $R(r)$が天体の重力ポテンシャルを表すとき，前問の一般解はどうなるか，理由とともに述べよ．
2. (1) 赤道半径を a, 極半径を b とする回転楕円体の式を書け. ただし赤道面内に xy 軸, この面に直交する方向を z 軸とする．(2)楕円体上のある点 P（緯度 ϕ，経度 λ とする）の三次元座標 x,y,z の三成分を卯酉線半径 N，緯度 ϕ，経度 λ を用いて表せ. ただし $N=a^2/\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}$ とする.
3. ジオイド高が国土地理院から提供されるようになった理由を，GNSS の普及を踏まえて「標高」「楕円体高」の二語を用いて説明せよ.
4. 国際天文座標系の電波星(準星)の位置は，赤経 α と赤緯 δ で指定される．関連する以下の問いに答えよ．(1) 赤経 α は何(どこ)を基準にして測定(定義)されるか? (2) 赤緯 δ は何を基準に測定(定義)されるか? (3) 赤経 α と赤緯 δ そのものには地球の自転や観測地点の場所は考慮されておらず, 観測地点から見た電波星の方向を時角 H で表す．電波星の赤経 α，宇宙空間に対する地球の自転運動を表す角度 Θ，地球上の観測地点の経度 λ と時角 H の間に成り立つ関係を式で表せ．(4) 前問(3)の角度 Θ のことを特に何と呼ぶか?
5. (1)地球の極運動の最大振幅は 0.3 ~~mas(ミリ秒角)~~as(秒角)程度である. これが地上の距離にしてどの程度かを概算し，単位とともに答えよ．途中の式を必ず書くこと．(2) 剛体の回転楕円体から予想されるオイラー極運動の周波数の表式 $\sigma=\frac{C-A}{A}\Omega$ で(Ω は自転角速度)，A および C はそれぞれ何を示すか，両方とも答えよ．(3)地球のチャンドラー極運動と同様な現象を最も観測しやすい(地球以外の)地球型惑星はどれか? 次の表から考察し，根拠となるキーワードと共に 30-40 字程度で述べよ.

キーワード	水星	金星	地球	火星
軌道長半径（10^6km）	57.9	108.2	149.6	227.9
赤道半径（km）	2440	6052	6378	3397
扁平率	0.0	0.0	1/294.118	1/192.308

赤道重力（m/s²）	3.7	8.9	9.78	3.7
自転周期(日)	58.65	243.02	0.9973	1.0260
平均密度（g/cm³）	5.43	5.24	5.52	3.93

6. 質点としての地球(質量 M)のまわりを運動する人工衛星(質量は M より十分小さい)の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{GM}{r^3}\vec{r}$ である．単位質量あたりの角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ として，ケプラーの第 2 法則を導け．

7. 地球を周回する人工衛星の運動は，現実には様々な摂動が働く．地球に固定された座標系に対する衛星軌道は，軌道 6 要素（ケプラー要素）を用いて記述され，最も大きな摂動である J_2 摂動を考慮すると，軌道要素のそれぞれの時間変化は下の 6 つの式に従う．ただし，R_e は地球の半径，n は「平均運動」（ケプラー第 3 法則から求まる平均公転角速度）で定数である．以下の問いに答えよ．
(1)軌道要素のうち e, i, ω, Ω それぞれの定義を述べよ．
(2)人工衛星に働く「摂動」にはどんな力があるか，J_2 摂動は除いて，3 つ列挙せよ．(3) J_2 と地球の扁平率 f の意味の違いを簡潔に説明せよ(20 字程度)．(4) $1-5\cos^2 i = 0$ を満たすような i として $i = 63.4°$ を得ることができる．この衛星の軌道の特徴を簡潔に述べよ．

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$

8. 札幌市の A 点と B 点の間を結ぶある路線で水準測量を継続的に行ってきた結果，A 点に対する B 点の比高の経年変化のデータが得られた．いま，時刻 t とそのときの比高データ y の 10 組のデータ$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots (t_{10}, y_{10})$があるとする．これらのデータを，$y$ と t の 2 次関数 $y = at^2 + bt + c$ で近似して，a, b, c の値を最小二乗法で求めたい．(1)比高データ y_i (i=1,..,10)を 10 行 1 列の列ベクトル $\mathbf{d}$ とし，推定したい 3 つのパラメータ a, b, c をこの順に 3 行 1 列の列ベクトル $\mathbf{m}$ の要素として，$\mathbf{d} \fallingdotseq \mathbf{G}\ \mathbf{m}$ と近似したい．この行列 $\mathbf{G}$ は何行何列になるか．(2) 行列 $\mathbf{G}$ の要素が具体的にどうなるかを記せ．ただし全ての要素を記す必要はない．(3)現実の観測量は誤差を含むため上記のモデルでは表現しきれない残差(エラー)がある．全観測データへの残差をまとめて $\mathbf{e}$ とすると $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}$ となる．残差の二乗和を $\mathbf{d}, \mathbf{G}, \mathbf{m}$ を用いて表せ．(3)最小二乗解 $\mathbf{m}$ を $\mathbf{d}, \mathbf{G}$ を用いて表せ．