「宇宙測地学」期末試験問題(2018.2.2)

1. デカルト座標(x,y,z)系でのスカラー関数 Φ に関するラプラス方程式を記せ．ただしラプラシアン記号 Δ は使わないこと．

2. ラプラス方程式を満足するような(x,y,z)の関数を一つ記せ．

3. 質量 M, 半径 R の天体の重力ポテンシャル W を，この天体に原点をもつ球座標(動径 r, 緯度 ϕ, 経度 λ)で表現すると，ルジャンドル陪関数 $P_{nm}(\sin\phi)$を用いて次式のようにストークス係数 C_{nm}, S_{nm} で展開される：

$$W = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n \left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\phi).$$

ただし，C_{nm}, S_{nm} は次のように求められる： δ_{0m} は m=0 の時 1,それ以外のときは 0 であることを示すクロネッカー記号で，0!=1 とする．

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2-\delta_{0m}}{MR^n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iiint (r')^n P_{nm}(\sin\phi')\begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} dM$$

C_{nm}, S_{nm} の物理的な意味に関する以下の問いに答えよ．途中の式も記すこと．(1)C_{10}がどう表せるか示し，その意味を述べよ．(2)S_{11}がどう表せるか示し，その意味を述べよ．(3)C_{20}が以下の慣性モーメントで表せることを示せ．ただし $P_{20}(\sin\phi) = \dfrac{1}{2}(3\sin^2\phi - 1)$ を利用し， x,y,z 軸の周りの慣性モーメントをそれぞれ $A = \iiint (y^2+z^2)dM$ ，$B = \iiint (z^2+x^2)dM$,$C = \iiint (x^2+y^2)dM$ とする．

4. 宇宙測地技術では，生の観測データそのものを幾つかの未知パラメータで表現される適当なモデルに当てはめて, 推定された未知パラメータが測地データとして意味を持つことが多い. パラメータ推定の単純な事例として, あるデータを月に一回測定し, 120 ヶ月間続けた場合を考える．データを見ると，12 ヶ月の周期で変化しつつ，経年的に増加していることから，この観測量を説明するように，独立変数として時刻 t, 従属変数(観測量)を y とする次式のようなモデルを考えた：

$y=a + bt + c\sin(2\pi t/12) + d\cos(2\pi t/12).$

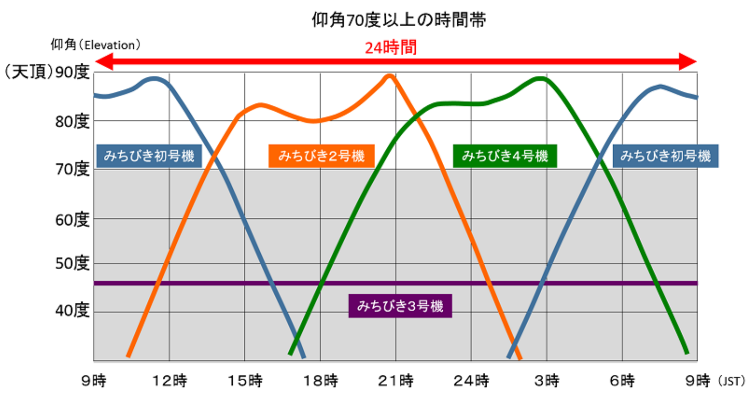
得られたデータから，4 つのパラメータ(a,b,c,d)を最小二乗法で推定したい. 以下の問いに答えよ. (1)観測値 y_i (i=1…120)を 120 行 1 列の列ベクトル $\boldsymbol{d}$ とし，推定したい 4 つのパラメータ(a,b,c,d) を 4 行 1 列の列ベクトル $\boldsymbol{m}$ とする．このとき $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{Gm}$ と近似するような行列 $\boldsymbol{G}$ は何行何列か. (2)現実の観測値は誤差を含み，モデル自体が不適切なこともあるため，上記のモデルでは表現できない残差がある．全ての観測値と計算値の残

差をまとめて列ベクトル $\boldsymbol{e}$ で表すと，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}$ となる．残差の二乗和を $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{m}$ を用いて表せ．ただし二乗和はスカラー量(1 行 1 列の「行列」)になることに注意せよ．(3)最小二乗法とは(2)で得た式が極値を持つような $\boldsymbol{m}$ を求めることである．この原理に基づいて得られる $\boldsymbol{m}$ を $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{G}$ を用いて表せ．転置行列，逆行列を適宜定義すること．(4)この観測量が経年的に加速しているとすると，どんなモデルになるか記せ．

5. 超長基線電波干渉法に関して，以下の問いに答えよ．(1)この技術の略称をアルファベットで記せ．(2)この手法の「電波源」は数 10 億光年離れた準星と呼ばれる天体で，その位置は「α(J2000.0)=X h Y m, δ (J2000.0)= P° Q′ 」のように指定される．α と δ はそれぞれ何を表すか答えよ．(3) 前問の「J2000.0」は何を意味して，なぜ示す必要があるのか，50 字程度で説明せよ．(4) 超長基線電波干渉法では，準星からの電波の，地球上の複数の観測点への「到達時間差（遅延量)」を求めている．到達時間差を物理的要因は複数考えられるが，観測点間の距離以外に，どんな要因があるか，一つ答えよ．

6. GRACE 衛星によって，問題 **3** の係数 C_{nm},S_{nm} が毎月一回程度更新され，300km 程度の空間スケールで一ヶ月の間に地球システムで起こる各種の<u>質量分布変化</u>が分かるようになった．以下の問いに答えよ．(1)下線部の一つとして M9 クラスの巨大地震に伴う重力変化がある．同じ震源深さの M7 の地震に伴う重力変化も検出するためには，GRACE をどう改良すれば良いか．30 字程度で述べよ．(2)GRACE のデータを見ると，陸上に比べて海上では質量分布変化が小さい．これはどう説明できるか，20 字程度で述べよ．

7. GNSS に関する以下の問いに答えよ．(1)GPS 衛星は現在ほぼ 30 機あり，全て e=0.003 のほぼ円軌道上にあり，0.5 恒星日で周回している．0.5 恒星日とは何時間何分か．(2)前問の情報から GPS 衛星の高度を求めることができるが，その方法を簡潔に説明せよ．(3)日本版 GPS「みちびき」(QZSS)は最近 4 機体制となった．右下図は，本年 1 月のある 24 時間に，つくば市からみて何時にどの仰角(水平線から見上げる角度)にあるかを示している．みちびき 3 号機だけ仰角が一定なのは，1,2,4 号機とは異なる 3 号機のどんな軌道を示すか答えよ．(4) 1,2,4 号機はともに e=0.1，1 恒星日で周回する軌道であるため，24 時間での仰角の変化の仕方は似ているが，70 度以上の仰角でも 24 時間内で常に一機は見えるように，ある軌道要素は異なっている．その軌道要素を答えよ．(5) 軌道要素 e とは何か，日本語で答えよ．



国土地理院 http://www.gsi.go.jp/denshi/denshi45015.html による

8. GNSS を用いた「相対測位（干渉測位）」では，受信機と各衛星までの距離を搬送波の位相で測定する．搬送波の波長を λ，衛星 A 受信機 1 間の幾何学的距離を $\rho^A{}_1$ とすると，この距離に相当する位相角は $2\pi\rho^A{}_1/\lambda$ である．一方で，実際に時刻 t に受信機 1 で受信する衛星 A からの位相角 $\Phi_1{}^A$ は[0, 2π]（或いは[-π,+π]）に丸めこまれているため，$\Phi_1{}^A$ は衛星受信機間の距離 $\rho^A{}_1$ に相当する位相角から，2π の整数倍 $2\pi N^A{}_1$ を引いた量になる（ただし $N^A{}_1$ は未知）．また，衛星 A および受信機 1 にある時計は全世界共通の時計と完全に同期しているわけでもないため，それぞれの同期誤差 δt^A と δt_1 も位相データに新たな未知量として加わる．さらに，真空ではない電離層と対流圏をマイクロ波が伝搬することに伴う見かけの距離変化（${}^{ion}\Delta^A{}_1$ と ${}^{trop}\Delta^A{}_1$）も無視できない．以上より，観測される位相データ $\Phi_1{}^A$ は次式のように表現できる; ε はその他の誤差を示す. 以下の問いに答えよ.

$$\Phi_1^A = \frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1^A - N_1^A\lambda) + 2\pi f(\delta t^A - \delta t_1) + \frac{2\pi}{\lambda}({}^{ion}\Delta_1^A + {}^{trop}\Delta_1^A) + \varepsilon.$$

(1)この式のままでは未知パラメータが多いため，δt^A と δt_1 を消去するための「二重差をとる」という操作がある. どういう操作かを, 別の受信機 2 での衛星 B からのデータ $\Phi_2{}^B$ を用いるとして, 100 字程度で説明せよ. (2)その他の誤差要因 ε の一つに「マルチパス」と呼ばれる効果がある．どういう効果のことかを 30-40 字程度で説明せよ．

9. 前問の電離層の効果 ${}^{ion}\Delta^A{}_1$ と対流圏の効果 ${}^{trop}\Delta^A{}_1$ は，真空以外の媒質中での位相速度 v_p が光速 c とは異なり，屈折率 $n \equiv c/v_p$ が 1 ではないためである．電波源から受信点までの真空ではない媒質中の全伝搬経路長 L は, 伝搬経路 S に沿って屈折率を積分して $L=\int n\, ds$ と得られる : S は一般に直線ではない．一方，電波の送信源と受信点との間の<u>直線</u>距離(真空での伝搬経路長)を G とすれば，現実の電離層/対流圏を伝搬することに伴うみかけの経路長変化は $\Delta L=\int n\, ds - G=\int (n-1)\, ds+[S-G]$ となる．以下の問いに答えよ．(1)上の第 1 項の積分が上述の伝搬速度の変化による効果で，第 2 項の$[S-G]$は伝搬経路が非真空中で湾曲する効果を示し，一般に第 1 項に比べて十分小さい；講義では$[S-G]$を始めから無視した式を示したが，厳密にはこの式が正しい．電離層や対流圏が水平成層構造をしているとき，$[S-G]$は仰角と共にどう変化するか．横軸に仰角，縦軸に$[S-G]$ としたグラフに描いて示せ．(2)電離層の電波の位相速度 v_p に対する屈折率は右の式で与えられる．ここで f は電波の周波数(Hz), N_e は自由電子の数密度(1/m^3)を示す．電離層での見かけの伝搬距離変化 ΔL はどう表わされるか．ただし$[S-G]$ は無視する．(3)前問の結果から,「電波伝搬経路に沿った単位面積あたりの総電子数(=Total Electron Content/TEC とよぶ)」が，二周波 f_1 と f_2 を用いた同時観測をすれば得られることを説明せよ．

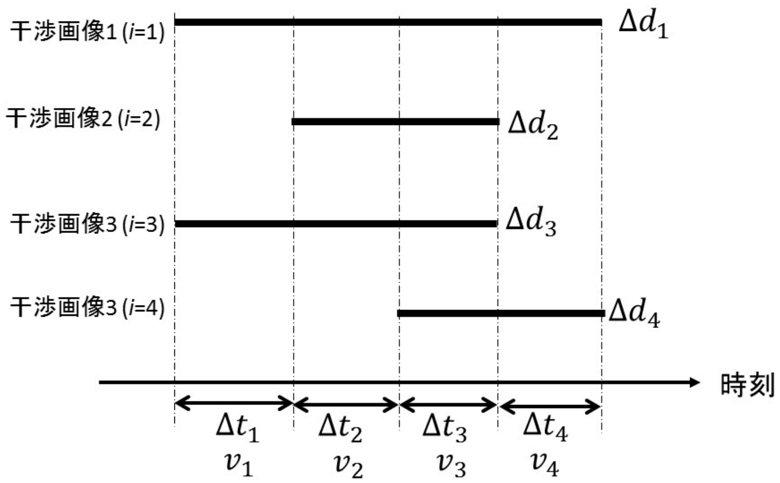
$$n_p = 1 - 40.3\frac{N_e}{f^2}$$

10．人工衛星から地表の同じ場所の合成開口レーダー(SAR)画像を時期を変えて 2 回撮影する間に，地表と人工衛星を結ぶ距離が Δr (m)だけ変化したとする．このとき，電波の波長を λ (m)とすると位相は（ア）(rad)だけ変化する．このように位相の変化を調べることで地表の動きを求める方法を差分干渉合成開口レーダー，あるいは(イ)と呼ぶ．

日本が打ち上げた人工衛星に搭載された合成開口レーダー(SAR)は，GNSS と同じく（ウ）という波長帯のマイクロ波を用いている．地殻変動を求める上で，GNSS と SAR は大きく異なる特徴を持つ．まず，数十日に一度撮像することで地殻変動を求める SAR に比べて，GNSS の方が圧倒的に（エ）が高い．一方，例えば国土地理院が運営する GEONET が約 20 km 間隔で設置されているように，GNSS よりも SAR の方が圧倒的に（オ）が高い．

問題 1.上の文章の（ア）から（オ）に最も適切な語句あるいは数式を入れよ．

問題 2.文中の傍線部について，干渉画像に含まれる誤差のうち時間的にランダムに変化する成分は時系列解析を用いて軽減できる．今 4 枚の干渉画像があり，下図のように撮像期間がそれぞれ異なるとする．例えば干渉画像 1 は 4 期間にまたがり，衛星視線方向の距離変化はΔd_1なので，$\Delta d_1 = \Delta t_1 v_1 + \Delta t_2 v_2 + \Delta t_3 v_3 + \Delta t_4 v_4$となる．$v_i$は期間$\Delta t_i$における地表の衛星視線方向の変位速度である．この方法を用いて大量の干渉画像からv_iをノルム最小の条件のもとで解くことで時間方向に滑らかな解を得ることができる．



問 1，干渉画像 2, 3, 4 について，1 と同様にΔd_iとv_iの関係式を導け．

問 2，Δd_iとv_iの関係を次のように行列とベクトルで表す．

$$\begin{pmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta d_3 \\ \Delta d_4 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

この時，行列 $\mathbf{G}$ の要素を具体的に記せ．