

「宇宙測地学」 中間試験問題(2017.12.8)

1. 右の式は極運動 $m(t)$ の方程式である. ここで $m(t)$ は摂動を受けた角速度ベクトル $\omega = \Omega(m, m, 1+m)$ の x, y 二成分を合わせた複素数 $\frac{i}{\sigma} \frac{dm}{dt} + m = f(t)$ 表記 $m = m + im$ である. $f(t)$ は時刻 t での外力で, t の関数である. また σ は一定の固有振動数, i は虚数単位である. 以下の問いに答えよ. (1) 右辺の $f(t)=0$ としたときの解を記せ. (2) $f(t)$ が 0 ではない場合の解 $m(t)$ の表現を導け. ただし初期条件は $t=0$ のとき $m(0)=m_0$ とする.

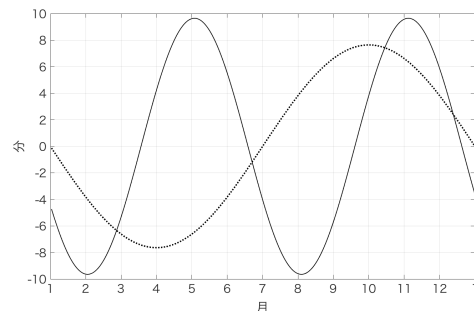
2. 位置の関数である重力ポテンシャル $W(x, y, z)$ と重力加速度ベクトル \vec{g} の関係について以下の問いに答えよ. (1) $W(x, y, z)$ の全微分 $dW(x, y, z)$ が, ベクトル \vec{g} と微小変位ベクトル $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ の内積で表せることを記せ (途中の式も書くこと). (2) $dW=0$ の面は等ポテンシャル面である. どんな等ポテンシャル面を「ジオイド」と呼ぶの簡潔に述べよ. (3) 正標高 H が重力ポテンシャル値の二点間の差とその間の平均重力値で表せることを導け. ヒント: (1) の結果を利用して, ベクトル \vec{g} と $d\vec{x}$ を反対向きにとること.

3. 地球に固定された地心直交座標系における座標値 (x, y, z) と従来から用いられてきた緯度 φ と経度 λ は右の式で結びつけられる. ただし a と b はそれぞれ回転楕円体の長半径と短半径である. 以下の問いに答えよ.
- $$\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z = ((b^2/a^2)N+h)\sin\varphi \end{cases}$$

(1) N は何と呼ばれるか. (2) $h=0$ のときの (x, y, z) は回転楕円体上にあることを利用して, N の表式を導け: 途中の式を省略しないこと.

4. 1日の24時間とは仮想的な「(ア) 太陽」の南中から南中までで定義され, かつては1秒の定義もこの(イ)分の1であった. 一方, 現実に見える太陽は「(ウ) 太陽」と呼ばれる. 「(ウ) 太陽」の南中から南中までを24時間と決めると, 一見わかりやすいが, 一年のなかで時期によって24時間の長さが変わってしまう. この差は(ウ)太陽と(ア)太陽の差で(エ)と呼ばれる.

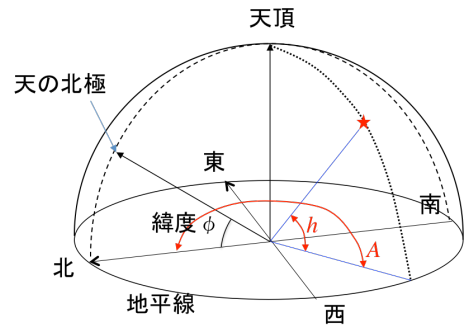
以下の問いに答えよ. (1) (ア)~(エ)に当てはまる適当な語句や数値を答えよ. (2) (エ)の原因には二つの効果があり, 一年の間に右図の実線と点線のように変化する. 実線は春分, 夏至, 秋分, 冬至のときにゼロになるが, これはなぜか.



実線の意味について, 天球上に黄道と天の赤道を描いて, 説明せよ.

5. 今年の 10 月, 中性子星合体による重力波の放出イベント GW170817 が報告されたが, 可視光や電波の放出も検出された. 天体の位置は「 $\alpha(\text{J2000.0})=13\text{h}09\text{m}$, $\delta(\text{J2000.0})=-23^\circ 23'$ 」と与えられ, 世界の望遠鏡による観測が行われた. (1) α と δ はそれぞれ何を表すか答えよ. (2) 「J2000.0」のように記す必要性を, 「歳差運動」の語を用いて, 40-50 字程度で述べよ. (3) $\delta = -23^\circ 23'$ が負であることから, この天体を日本から観測できるのは一年のうちで何月から何月頃か?

6. 天体の位置を赤道座標系から, グリニッジ子午線上の緯度 ϕ の地点の「地平座標系」で指定することを考える. 地平座標系では観測者を原点として右図のように真北からの方位角 A と地平線からの高度(仰角) h で指定する. (1)赤道座標系から地平座標系に変換するために, まず地球の自転を考慮して, 天の北極の(z 軸)周りに恒星時 Θ だけ赤道座標系を回転させる. この回転行列を記せ. (2)さらに, 天の北極方向の軸を天頂方向に向けるために y 軸の周りに $(\pi/2 - \phi)$ だけ回転させる. そのための回転行列を記せ.



7. 質点としての地球(質量 M)のまわりを運動する人工衛星(質量は M より十分小さい)の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ と表せる:ベクトル \vec{r} が人工衛星の位置ベクトル. (1)単位

質量あたりの角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ として, $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ が時間変化しないことを導け. (2)ベクトル $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ の大きさと面積速度との関係を図示して説明せよ.

8. 人工衛星の運動は, 軌道 6 要素 (ケプラー要素) を用いて記述される. 最も大きな摂動である $J_2 (= -C_{20})$ の効果を考慮すると, 軌道要素の時間変化は右の 6 つの式に従う. ただし, n は「平均運動」(ケプラー第 3 法則から求まる平均公転角速度) で定数である. 以下の問いに答えよ. (1) e, i, Ω それぞれを日本語で何と呼ぶか. (2)「 $1-5\cos^2 i = 0$ 」を満たす i の一つは $i=63.4^\circ$ である.

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$

この i を満たす軌道運動の最大の特徴を 15 字程度で述べよ.

(3)前問の i は旧ソ連がしばしば用いてきた「モルニア軌道」の性質である.

この i を採用しつつ, 北半球上空にいる時間をできるだけ長くしたい. そのためには ω は何度にすべきか. (4)さらに e 及び a はどうあるべきか, 30 字程度で説明せよ.

9. GRAIL で得られた月重力場モデルの方が, GRACE による地球重力場モデルよりも空間分解能が高い理由を 30-40 字程度で説明せよ.