

「宇宙測地学」 期末試験問題(2019.2.1)

1. 球座標で定義されたラプラス方程式は、変数分離によって一般解を得る。動径方向の関数 $R(r)$ が満たす微分方程式は、便宜的に $n(n+1)$ を定数として

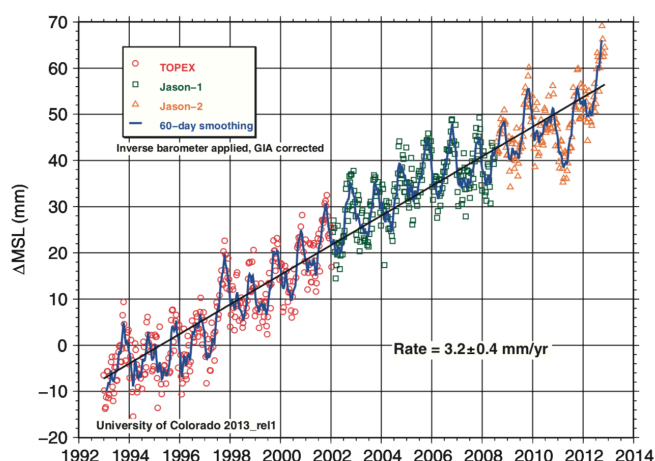
$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = n(n+1) \text{ となる。以下の問に答えよ。 (1) } R(r) = Ar^n \text{ および } R(r) = B/r^{n+1}$$

がこの微分方程式の解になることを示せ。ただし A と B は定数とする。(2) 前問から関数 $R(r)$ の一般解は $R(r) = Ar^n + B/r^{n+1}$ となるが、天体の重力ポテンシャルを表すときはどのような解になるべきか、理由とともに述べよ。

2. 重力加速度 g はベクトル量なので、普通に考えると 3 成分あるはずで、重力分布の図も 3 成分それぞれの図を示す必要がありそうな気がする。しかし、殆どの重力分布図(重力異常図)は 1 枚(1 成分)の図が単位を mgal などとして与えられるだけである。(1) この一見矛盾したような状況はどう説明できるか? 地上での重力測定を踏まえて 50 字程度で述べよ。(2) 1 gal の定義を cm と s (秒) を用いて答えよ。

3. 右下の図は TOPEX/POSEIDON, Jason1/2 等の海面高度計によって得られた 1992 年以降の全球の平均海水面の変化を示したものである。海面高度計の基本観測量は衛星に搭載された高度計と海水面との往復時間であるが、衛星の軌道データが地心座標系で与えられていることも重要な前提である。衛星の軌道データから(あ)に対する衛星高度 h を求めることができれば、前述の観測量から得られる衛星海水面間の距離との差を取ることによって、(あ)に対する「(い)+力学的海面高度」が計算できる。地球上では(い)は空間的に ± 100 m 程度変化するのに対して、力学的海面高度は高々 1 m 程度で時間変化も大きい

が、海流や長期的な海水準変動を反映する。以下の問いに答えよ。(1): 空欄(あ)~(い)に当てはまる適切な語句を答えよ。(2): (い)は海域だけでなく陸域でも求められており、国土地理院が日本列島の(い)のモデルを公表している。その理由を GNSS の普及を踏



まえ、「標高」の語を含めて 70 字程度で説明せよ。(3): 日本列島の(い)がプラス(+)の値を示すのは、沈み込み帯で高密度物質が直下にあるためであるが、なぜその結果として(い)がプラス(+)値を示すのか。(い)と重力加速度ベクトルとの関係を図示

して、50 字程度で説明せよ。(4)：図のデータは 12 ヶ月の周期で変化しつつ、経年的に増加していることから、 $y=a+bt+c\sin(2\pi t/12)+d\cos(2\pi t/12)$ というモデルで近似する。データから 4 つのパラメータ (a,b,c,d) を最小二乗法で推定することを考える。観測値 $y_i (i=1\dots 240)$ を 240 行 1 列の列ベクトル \mathbf{d} とし、推定したい 4 つのパラメータ (a,b,c,d) を 4 行 1 列の列ベクトル \mathbf{m} とする。このとき \mathbf{d} を \mathbf{Gm} と近似するような行列 \mathbf{G} は何行何列か。(5)：最小二乗法で得られる \mathbf{m} を \mathbf{d} , \mathbf{G} を用いて表せ。転置行列、逆行列を適宜定義すること。

4. 地球（質量は M とする）を周回する人工衛星が「地球同期衛星」であるとは、衛星が軌道を一周するのに要する時間(交点周期)が(ア)地球の自転周期と等しい場合のことをいう。地球を質量 M の質点と見なしてケプラーの第 3 法則 $n^2 a^3 = GM$ (G は万有引力定数, 平均運動 $n=2\pi/\text{交点周期}$)に基づいて、 a を求めると $a=42165\text{km}$ が得られる。以下の問いに答えよ。(1)下線部(ア)を出来るだけ正確に答えよ。(2)離心率が 0 で、軌道傾斜角も 0 の地球同期衛星を一般に何衛星とよぶか。(3)離心率 0 であるが、軌道傾斜角が 0 ではない地球同期衛星は、衛星の地球上直下点の軌跡が 8 の字を描くことから 8 の字衛星とよばれる。なぜ「8 の字を描く」かを、適宜図を用いて 50-100 字程度で説明せよ。(4)日本が打ち上げた「みちびき」は離心率も軌道傾斜角も 0 ではない地球同期軌道である。このような軌道にしたメリットを 2 点説明せよ(それぞれ 30 字程度)。
5. 重力ポテンシャル W の球面調和関数展開の係数 C_{nm}, S_{nm} のうち、 C_{20} ($= -J_2$)については、(a)単独の人工衛星の軌道解析から求めることができ、SLR 衛星を用いて 1970 年代以降の J_2 の時間変化も得られている。しかし 2002 年に打ち上がった GRACE 衛星によって、より次数 n の高い係数 C_{nm}, S_{nm} が毎月一回程度更新されるようになり、2018 年には後継機も打ち上がった。(1)下線部(a)は軌道 6 要素のうちどの要素が、どのように変化することを利用するか、簡潔に答えよ。(2) GRACE の観測原理について、40 字程度で説明せよ。
6. GNSS を用いた「単独測位」では衛星から送られてくる (あ) 暦と呼ばれる軌道データに基づいて受信機の三次元座標を解いている。衛星が $t=t_s$ で発信した信号を受信機が $t=t_r$ に受信したとすると、衛星-受信機間の距離は光速 c を用いて (い) となるが、この距離は (う) と呼ばれ、実際の距離に対応していない。これは各衛星の時計はほぼ (え) しているが、受信機側の時計とは (え) していないため、その結果として少なくとも (お) 機以上の衛星からの信号を受信する必要がある。一方、「相対測位 (干渉測位)」では受信機と各衛星までの距離を (か) 波の位相で測定する。(か) 波の波長を λ , 衛星 A 受信機 1 間の幾何学的距離を ρ^A_1

とすると、この距離に相当する位相角(radian)は (き) である。しかし、実際に時刻 t に受信機 1 で受信する衛星 A からの位相角 Φ_1^A は $[0, 2\pi]$ (或いは $[-\pi, +\pi]$) に丸めこまれているため、 Φ_1^A は衛星受信機間の距離 ρ_1^A に相当する位相角 (き) から、 2π の整数倍 $2\pi N_1^A$ を引いた量になる (ただし N_1^A は未知)。また、衛星 A および受信機 1 にある時計は全世界共通の時計と完全に (え) しているわけでもないため、それぞれの (え) 誤差 δt^A と δt_1 も位相データに新たな未知量として加わる。「相対測位 (干渉測位)」でも (あ) 暦が用いられることもあるが、二週間程度後に公表される (く) 暦を用いて、より精度の高いデータを得る。以下の問いに答えよ。

問 1: 空欄 (あ) ~ (く) に当てはまる適切な語句, 数値または式を記せ。

問 2: 観測される位相データ Φ_1^A を左辺とし, 文中で述べた 3 つの未知量を右辺に用いて表現せよ。ただし, GNSS の送信電波の周波数を f とし, 文中で述べていないその他の誤差要因は ε とせよ。

問 3: 前問の式は左辺の一観測量に対して 3 つの未知パラメータが右辺にあるため, δt^A と δt_1 を消去するための「二重差をとる」という操作を行う。どういう操作かを, 別の受信機 2 での衛星 B からのデータ Φ_2^B を用いるとして, 100 字程度で説明せよ。

問 4: その他の誤差要因 ε の一つに「マルチパス」とよばれる効果がある。そのようなデータは単に使われないことも多いが, 積雪や潮位変化の検出手段として利用されることもある。その検出原理を「直接波」と「反射波」の語を用いて, 50 字程度で説明せよ。

7. 前問の GNSS に限らず, マイクロ波を用いた宇宙測地技術では, 非真空媒質中での電波の位相速度 v_p が光速 c と異なることも大きな誤差要因になる。屈折率 $n \equiv c/v_p$ が 1 ではないためである。現実の電離圏/対流圏を伝搬することに伴うみかけの経路長変化は $\Delta L = \int (n-1) ds$ となる: 積分は電波の電波経路に沿っている。一方, 屈折現象は, 外部から入射した角振動数 $\omega (=2\pi f)$ の電磁波が媒質中の電子を振動させることに伴って二次的に放射される電磁波として
- $$n = 1 + \frac{N_e q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$
- モデル化され, 右の式で与えられる。ここで媒質に依存するのは, N_e (媒質中の電子の数密度($1/m^3$)) と ω_0 (媒質中に束縛される電子の共鳴角振動数) である。電子電荷 q_e , 電子質量 m_e , 真空の誘電率 $\varepsilon_0 (>0)$ は定数である。

問 1: 電離圏では大気分子が太陽放射によって電離され, 電子は「自由」に動き回ることができる。このことから電離圏の屈折率の表現を記せ。

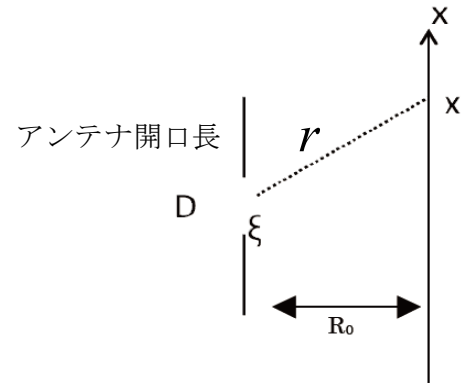
問 2: 電離層での見かけの伝搬距離変化 ΔL は真空中に比べてどうなるか (長くなるか, 短くなるか?) を示せ。

問 3: 二周波 f_1 と f_2 を用いた同時観測をすれば, 「電波伝搬経路に沿った単位面積あ

たりの総電子数(=Total Electron Content/TEC)」が得られることを説明せよ。

問4: マイクロ波の対流圏での屈折率は電離圏の屈折率のような周波数依存性がないことから、対流圏での見かけの伝搬距離変化 ΔL は真空中に比べてどうなるか (長くなるか、短くなるか?) を示せ。

8. 合成開口レーダーについて考える前に、実開口レーダーについて考えてみよう (右図)。人工衛星に搭載されたアンテナが地表 (遠方) に作る電場のパターン (空間変化する成分) は以下の式のように表せる。



$$E(x) = \int_{-D/2}^{D/2} (\text{ア}) \exp(ikr) d\xi \quad (1)$$

ここで波数を $k=2\pi/\lambda$, アンテナ開口長を D , r はアンテナの微小領域 $d\xi$ から地表面までの距離である。なお式(1)の導出には、アンテナの微小領域 $d\xi$ から電波が球面波として伝わることを用いている。

衛星高度 R_0 が x および D よりも十分大きいことを考慮すると、近似的に次の式を導くことができる:

$$E(x) = E_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi D}{R_0 \lambda} x\right) \quad (2)$$

ここで、 E_0 は電場の振幅、 $\operatorname{sinc}(x) = (\text{イ})$ である。式(2)から、電場の強度がピークの半分以上の値を持つ幅 (半値幅) は約 $(R_0 \lambda)/D$ である。アンテナ開口長を 10 m, 電波の波長を 23 cm, 衛星高度を 690 km とすると、この半値幅はおよそ (ウ) km となる。合成開口レーダーでは 2 つの方法を用いて空間分解能を高めている。まず、アンテナから射出するマイクロ波の周波数を時間と共に線形に変化させることで受信波と参照波の相関関数が鋭いピークを持つようにして、レンジ方向の空間分解能を高めている (これを (エ) 圧縮と呼ぶ)。また、人工衛星と地表物体の相対速度が時間変化することから、後方散乱波の周波数も (オ) 効果によって時間変化する。これを利用してアジマス方向の空間分解能を高めている。

問題 1, 上の文章の (ア) から (オ) に最も適切な語句あるいは数式を入れよ。なお、(ア) を導く際には、下線部を考慮すること。

問題 2, 差分干渉合成開口レーダー(InSAR)と GNSS は、ともに地表の変位を検出する技術であるが、それぞれ長所と短所がある。InSAR が GNSS に対して持つ長所を 2 つ挙げよ。

問題 3, InSAR でも GNSS でも、時系列解析を行うことでより精度の高い地表変位を得ることができる。それは何故か? 50 字以内で説明せよ。