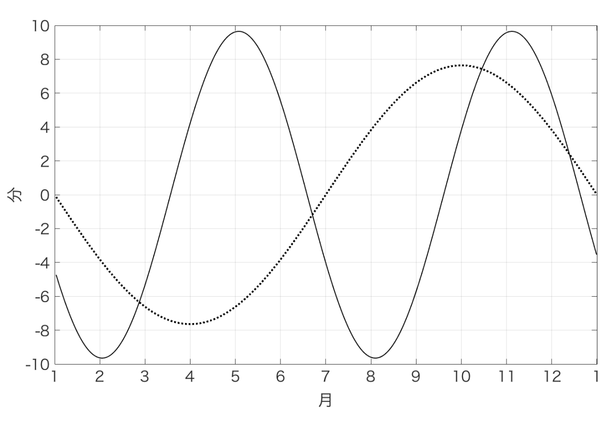
「宇宙測地学」中間試験問題(2018.11.30)

1. 極半径を b, 赤道半径を a とする軸対称な回転楕円体の式を記せ. ただし, 赤道面に x 軸と y 軸があり，z 軸はそれに直交するとする.
2. 位置の関数である重力ポテンシャル $W(x,y,z)$と重力加速度ベクトル $\vec{g}$の関係について以下の問いに答えよ．(1)$W(x,y,z)$の全微分 $dW(x,y,z)$が，ベクトル $\vec{g}$と微小変位ベクトル $d\vec{x}=(dx,dy,dz)$の内積で表せることを記せ（$\vec{g}$の定義も書くこと）．(2)$dW=0$ の面は等ポテンシャル面である．無数にあるそのような面のうち，どんな等ポテンシャル面を「ジオイド」と呼ぶか，簡潔に答えよ．(3)正標高 H が重力ポテンシャル値の二点間の差とその間の平均重力値で表せることを導け．ヒント：(1)の結果を利用して，ベクトル $\vec{g}$と $d\vec{x}$を反対向きにとること．(4)「比高」を測定する伝統的な（最近の宇宙測地技術に依らない）手法の名称を答えよ．
3. 地球に固定された地心直交座標系における地表の座標値(x,y,z)と従来から用いられてきた緯度φと経度λは右の式で結びつけられる．ただし a と b はそれぞれ回転楕円体の長半径と短半径である．以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x=(N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y=(N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z=((b^2/a^2)N+h)\sin\varphi \end{cases}$$

   (1) Nは何と呼ばれるか．(2) h=0 のときの(x,y,z)は回転楕円体上にあることを利用して，Nの表式を導け：途中の式を省略しないこと．(3) hで表される「高さ」を何と呼ぶか．(4) 前問の h から標高を求めるためにはどうすれば良いか，20 字以内で説明せよ．
4. 1 日の 24 時間とは仮想的な「（ア）太陽」の南中から南中までで定義され，かつては 1 秒の定義もこの（イ）分の 1 であった．一方，現実に見える太陽は「（ウ）太陽」と呼ばれる．「（ウ）太陽」の南中から南中までを 24 時間と決めると単純でわかりやすいが, 一年のなかで時期によって 24 時間の長さが変わってしまう. この差は（ウ）太陽と（ア）太陽の差で（エ）と呼ばれる．以下の問いに答えよ．(1)（ア）～（エ）に当てはまる適当な語句や数値を答えよ．(2)（エ）の原因には二つの効果があり，一年の間に右図の実線と点線のように変化する．実線は春分，夏至，秋分，冬至のときにゼロになるが，これはなぜか．実線の意味について，天球上に黄道と天の赤道を描いて，説明せよ．(3)現在の 1 秒は, ある原子の特定の放射周期に基づいている. その原子名を答えよ.



5. VLBI に関して，以下の問いに答えよ．(1) VLBI とは何の略称か，正式名称を英語で記せ．(2) この手法では数 10 億光年離れた準星と呼ばれる天体を「電波源」とし，その位置は「α(J2000.0)=○h○m, δ (J2000.0)= ○° ○′ 」のように指定される．α と δ はそれぞれ何を表すか答えよ．(3) 前問の「J2000.0」は何を意味しているか，またなぜ示す必要があるのか，併せて 50 字程度で説明せよ．

6. z 軸まわりに軸対称な回転楕円体の運動を，この楕円体に張り付けた角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転する座標系で考える．ただし回転楕円体は剛体とし，慣性モーメント I，角速度ベクトル $\vec{\omega}$，トルク(力のモーメント) $\vec{L}$ は以下のように与えられるとする:

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

この回転座標系での角運動量 $\vec{H} = I\vec{\omega}$ の保存側は $d\vec{H}/dt + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{L}$ である. 以下の問いに答えよ．(1)この角運動量保存側の式を三成分に分けて記せ．(2)角速度ベクトル $\vec{\omega}$ がほぼ z 軸方向を向き，回転運動の揺らぎは小さいことから，1 に比べて十分に小さい量 m_i (i=1,2,3)を用いて $\vec{\omega}$=Ω(m_1, m_2, 1+ m_3)’と表す．ここで「’」は転置を示す．3 つの m_i (i=1,2,3)のそれぞれは，どのような地球回転変動に対応するか，説明せよ．(3)問(1)の結果を前問の $\vec{\omega}$ を用いて m_i の一次項まで残すと，固有周波数 $\sigma_r=(C-A)\Omega/A$ の固有振動(自由振動)が得られることを導け．(4)前問の σ_r に地球の値を代入すると周期 305 日の振動が期待されるが，現実に観測されている運動について 30-40 字程度で説明せよ．

7. 質点としての地球(質量 M)のまわりを運動する人工衛星(質量は M より十分小さい)の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ と表せる:ベクトル $\vec{r}$ が人工衛星の位置ベクトル．(1)単位質量あたりの(軌道)角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ として，$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ が時間変化しないことを導け．(2)ベクトル $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ の向きと大きさを図示して説明せよ．

8. 地球(半径 R_e)を周回する人工衛星の運動は，赤道座標系に対する軌道要素を用いて記述される．現実の地球を周回する人工衛星への最も大きな摂動である $J_2(=-C_{20})$ の効果を考慮すると，軌道要素の時間変化は右の 6 つの式に従う．ただし，n は「平均運動」（ケプラー第 3 法則から求まる平均公転角速度）で定数である．以下の問いに答えよ．(1) e, ω, Ω それぞれを何と呼ぶか(日本語でも英語でも可). (2) J_2(=$-C_{20}$=1.08x10^{-3})の

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$

定義を 30 字程度で説明せよ．(3)$d\Omega/dt$=0.9863°/*day* にすれば Ω は一年かけて 360° となる．$d\Omega/dt>0$ であるためには，i がどうであるべきか，10 字以内で述べよ。(4)前問(3)のような $d\Omega/dt$=0.9863°/*day* とそれを満たすような i を持つ軌道を太陽同期軌道と呼ぶ．地球観測衛星としてのこの軌道の性質を 50 字程度で説明せよ．

9. xyz 座標系の(座標軸の)変換について考える．まず z 軸の周りに反時計回りに α(radian)回転させて，x’y’z 系を作り，さらに x’軸の周りで反時計回りに β(radian)回転させる．この一連の操作を行うための行列を求めよ．ただし，xyz 座標系は右手系であるとする．