

「宇宙測地学」 期末試験問題(2020.1.31)

1. 球座標で定義されたラプラス方程式を変数分離すると、動径方向 r の関数 $R(r)$ が満たす

微分方程式は、便宜的に $n(n+1)$ を定数として $\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = n(n+1)$ となる。以下

の間に答えよ。(1) $R(r) = Ar^n$ がこの微分方程式の解であることを示せ。ただし A は定数とする。(2) $R(r) = B/r^{n+1}$ もこの微分方程式の解になることを示せ。ただし B は定数とする。(3) 前の2問から関数 $R(r)$ の一般解は $R(r) = Ar^n + B/r^{n+1}$ となるが、天体の重力ポテンシャルを表したい場合は、どんな解になるべきか、理由とともに述べよ。

2. 地球に固定された地心直交座標系における座標値 (x, y, z) と従来から用いられてきた緯度 φ 、経度 λ 、「高さ」に相当する h は右の式で結びつけられる。ただし a と b はそれぞれ(回転)楕円体の長半径と短半径で、 N は卯酉線半径である。以下の問いに答えよ。(i)
- $$\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z = (b^2/a^2 + h)N\sin\varphi \end{cases}$$

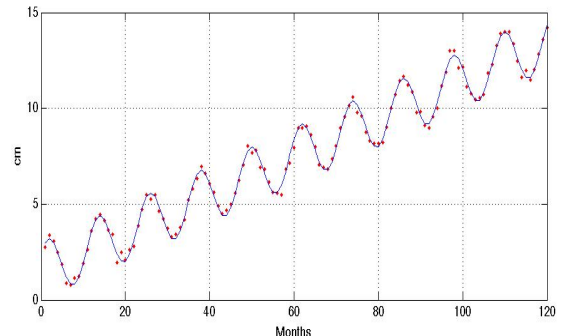
卯酉線と子午線を図に描いて説明せよ。(ii) $h=0$ のときの (x, y, z) は楕円体上にあることを利用して、 N の表式を導け: 途中の式を省略しないこと。(iii) 今日ではGNSS (GPS) 測量で容易に h を求められるが、カーナビやスマートフォンで h が表示されることは皆無である。その理由は h が「標高」ではないためだが、 h から「標高」を求める手続きがなぜ難しいか (進まないか) を20字以内で述べよ。

3. 人工衛星の軌道とその運動は、原動力となる天体を (ア) と見なすことができれば (イ) の法則に従うが、“大きさ”をもった天体を周回する人工衛星は (イ) の法則から外れて、一部の軌道要素が時間変化する。最大の効果は J_2 摂動で、 J_2 とは極軸と赤道軸の周りの慣性モーメント C と A の差を無次元化して $J_2 = (C-A)/MR_e^2$ と表される; M, R_e は母天体の質量と半径である。 J_2 摂動を積極的に利用する (ウ) 軌道では、軌道面がちょうど一年間で元に戻るような運動をする。また (ウ) 軌道にするためには軌道要素の一つである (エ) が必ず90度以上になるため、全地球をカバーできる利点もある。関連する以下の問いに答えよ。(i) 空欄 (ア) から (エ) に当てはまる語句を答えよ。(ii) 地球が質量 M の (ア) であるとする、そのまわりを周回する人工衛星(質量は M より十分小さい)の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ と表せる: \vec{r} が人工衛星の位置ベクトル。軌道角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ とし、 $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ が時間変化しないことを導け。(iii) 金星と地球は質量も半径もよく似ているが、地球に比べて金星は非常にゆっくりと自転している。このことから金星の J_2 が地球の J_2 と比べてどう異なるかを、理由とともに30字程度で説明せよ。

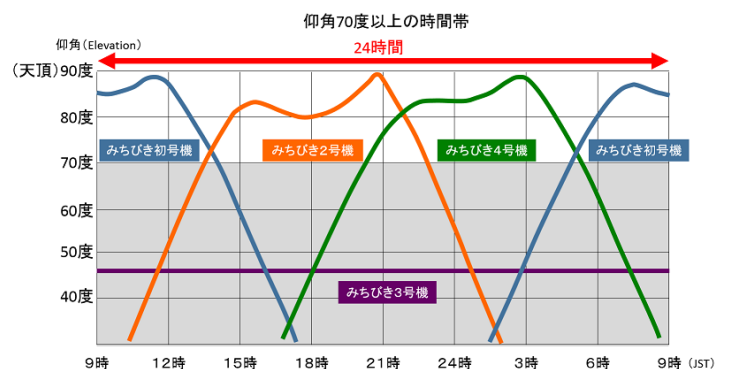
人工衛星(質量は M より十分小さい)の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ と表せる: \vec{r} が人工衛星

の位置ベクトル。軌道角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ とし、 $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ が時間変化しないことを導け。(iii) 金星と地球は質量も半径もよく似ているが、地球に比べて金星は非常にゆっくりと自転している。このことから金星の J_2 が地球の J_2 と比べてどう異なるかを、理由とともに30字程度で説明せよ。

4. ある観測量 y を月に一回測定し、120ヶ月間続けて得られたデータを右下図に点で示す。図を見ると、12ヶ月周期で変化しつつ、経年的には増加していることから、この観測を説明するように、独立変数を時刻 t 、従属変数(観測量)を y とするモデル $y = a + bt + c \sin(2\pi t/12) + d \cos(2\pi t/12)$ で近似することを考える。得られた120個のデータから4つのパラメータ (a, b, c, d) を最小二乗法で推定することを考える。(i)観測値 $y_i (i=1 \dots 120)$ を120行1列の列ベクトル \mathbf{d} とし、推定したい4つのパラメータ (a, b, c, d) を4行1列の列ベクトル \mathbf{m} とする。このとき \mathbf{d} を \mathbf{Gm} と近似するような行列 \mathbf{G} は何行何列か。(ii) 行列 \mathbf{G} の一行目の要素を全て記せ。(iii) 最小二乗法で得られる \mathbf{m} を \mathbf{d}, \mathbf{G} を用いて表せ。転置行列、逆行列を適宜定義すること。



5. GNSS 衛星に関する以下の問いに答えよ。(i) GPS 衛星は現在ほぼ 30 機あり、全て離心率 $e=0.003$ のほぼ円軌道上にあり、0.5 恒星日で周回している。0.5 恒星日とは何時間何分か。(ii) 前問の情報から GPS 衛星の高度を求めるための方法を簡潔に説明せよ。(iii) 日本版 GPS 「みちびき」(QZSS) は現在 4 機体制である。右下図はある日に、つくば市からみて何時にどの仰角(水平線から見上げる角度)にあるかを示す。みちびき 3 号機だけ仰角が一定なのは何故か、3 号機の軌道の特徴に言及して簡潔に説明せよ。(iv) 1,2,4 号機はともに $e=0.1$ 、1 恒星日で周回する軌道であるため、1 恒星日での仰角の変化の仕方は似ているが、70 度以上の仰角で常に一機は入れ替わりで見えるように、ある軌道要素だけは 3 機で異なっている。その軌道要素を答えよ。(v) QZSS が離心率 $e=0.1$ と GPS より楕円軌道に近いのは、どのような意図があるためか、30 字程度で説明せよ。(vi) 通常の GPS 測位でときどき問題になるが、準天頂衛星であるために飛躍的に低減が期待されるノイズ源(効果)を何と呼ぶか、答えよ。



6. GNSS (GPS) による単独測位によって受信機の位置座標を求めるためには、全ての₍₁₎衛星搭載の時計が同期していて、各衛星の位置(軌道情報から分かる)も既知という前提がある。3機の衛星からの受信で分かる₍₂₎見かけの距離からも位置座標の3成分が推定できるが、通常は₍₃₎もう一つの未知数があるため、最低4機から衛

星からの受信が必要である。GNSS 衛星は全衛星が同じ波長の搬送波を用いているが、二段階で変調されている。一つ目の変調は、どの衛星からの信号かを区別するため、送信電波の 1ms 長の中に 180 度の位相反転を 1023 回見かけ上ランダムに施すものである。各衛星に固有の仕方で反転している「擬似ランダムノイズ列」であり、「(C/A)コード」と呼ばれる。GPS 衛星-受信機間は 20000km 以上あるが、1ms に相当する長さ約 300km 分の各衛星固有の「コード」が繰り返し並んでいることになる。コード自体は公開され既知なので、受信機側で各衛星のコードを発生させて⁽⁴⁾相関をとることによって⁽²⁾見かけの距離を計測している。二段階目の変調として、コード 20 個毎(20 ms 毎)に衛星の⁽⁵⁾軌道情報などのデータが載せられている。(i)下線部(1)として 2 種類の原子時計がある。その元素記号を二つ答えよ。(ii)下線部(2)のことを特に何と呼ぶか。(iii)下線部(3)は具体的には何のことか、簡潔に説明せよ。(iv)下線部(4)の“ランダムな信号の相関処理”が現れる GNSS 以外の宇宙測地技術の一つアルファベットの略称で述べよ。(v)下線部(5)に含まれるリアルタイムの軌道情報は「放送暦」と呼ばれる予測値である。確定値は何と呼ぶか。

7. マイクロ波を用いた宇宙測地技術では、非真空媒質中での位相速度 v_p が光速 c と異なることも考慮しなければならない。屈折率 $n \equiv c/v_p$ が 1 ではないため、電波送信源と受信源の直線距離 L は、幾何学的には (真空ならば) $L = \int ds$ となるが (ds は線要素)、現実の電離圏/対流圏を伝搬することに伴い、 $\Delta L = \int (n-1) ds$ の分のみかけの経路長変化が発生する。一方、屈折現象は一般に外部から入射した⁽¹⁾角振動数 $\omega (=2\pi f)$ の電磁波が媒質中の電子を振動させることに伴っ

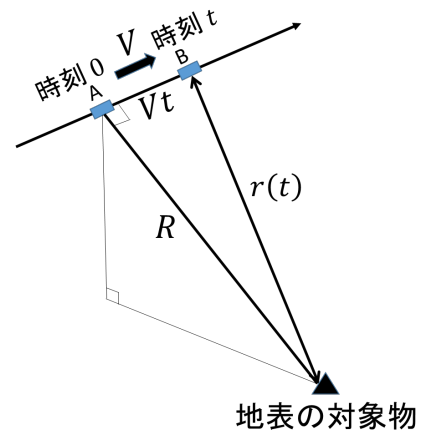
て二次的に放射される電磁波としてモデル化され、屈折率 n は
$$n = 1 + \frac{N_e q_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$
 右式で与えられる。ここで媒質に依存するのは、 N_e (媒質中の

電子の数密度($1/m^3$)と ω_0 (媒質中に束縛される電子の共鳴角振動数)である。電子電荷 q_e 、電子質量 m_e 、真空の誘電率 $\epsilon_0 (>0)$ は定数である。以下の問いに答えよ。

(i)共鳴角振動数 ω_0 の媒質に電子があるとして、下線部(1)の電子の運動方程式を記せ。ただし電子の運動は x 方向一次元とし、電磁波の電場は $E = E_0 \exp(i\omega t)$ とせよ。

(ii)電離層では太陽からの紫外線や X 線で空気分子が電離されていて、電子が「自由」に動き回る。その結果、電離層中の位相速度 v_p が光速 c を上回ることを上の式を利用して説明せよ。(iii)角振動数 ω と波数 k を用いると、位相速度 $v_p = \omega/k$ 、群速度 $v_g = d\omega/dk$ と定義される。電離層中の群速度 v_g は、前問とは逆に光速 c を超えないことを示せ。(iv)対流圏のマイクロ波に対する屈折率 n が角振動数 ω (つまり周波数 f) への依存性を持たないのは、どのように理解すれば良いか。上式を踏まえて、50-60 字程度で説明せよ。

8. 合成開口レーダーにおいては、空間分解能を高めるために2つの信号圧縮処理が用いられている。(1) 1つ目はパルス圧縮と呼ばれる技術であり、これを用いてレンジ方向の空間分解能を高めている (レンジ圧縮とも呼ばれる)。パルス圧縮を用いた場合のレンジ方向の空間分解能は送信信号の [(あ)] 幅が大きいほど高くなることが知られている。アジマス方向の空間分解能を高めるには [(い)] 効果を利用するアジマス圧縮が施される。



アジマス圧縮について図説する。右上図において、時刻 0 および時刻 t における衛星の位置を A および B とする。地表の対象物と衛星軌道の距離を R とする。衛星の移動速度を V とすると AB 間の距離は Vt となる。時刻 t における地表対象物と衛星間の距離 $r(t)$ は次式により計算できる。

$$r(t) = \sqrt{R^2 + (Vt)^2}$$

$R \gg Vt$ であることを用いて上の式を近似すると $r(t) = R + [(う)]$ と表すことができる。一方、地表対象物で散乱されたマイクロ波を衛星で受信した時の電場の位相 φ は以下のように表される。

$$\varphi(t) = 2\pi f_0 t - \frac{4\pi r(t)}{\lambda}$$

ここで、 f_0 は搬送波の周波数、 λ は波長である。上の式に $r(t) = R + [(う)]$ を代入して瞬間的な周波数 $\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}$ を計算すると、その値は $f_0 - [(え)]$ となる。つまり、受信波の周波数は時間に比例して変化する。したがってパルス圧縮 (レンジ圧縮) と類似の処理でアジマス方向の空間分解能も高めることができる。

問 1. 空欄 (あ) ~ (え) に当てはまる適切な語句および数式を答えよ。

問 2. 下線部 (1) について、パルス圧縮の具体的な内容を「sinc 関数」という用語を用いて 100 字以内で説明せよ。

問 3. 異なる 2 つの時期に撮像された SAR 画像の位相差を用いて地表変位を計測する技術を InSAR と呼ぶ。日本の SAR 衛星は搬送波の波長が約 24 cm であり、欧米の衛星の波長 (約 3 cm ~ 6 cm) よりも長い。InSAR 解析を行う上で、波長が長いことの長所と短所をそれぞれ 1 つずつ答えよ。