

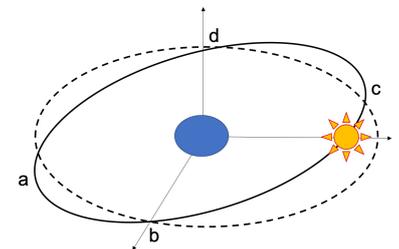
## 「宇宙測地学」 中間試験問題(2019.12.6)

1. 球座標系でのラプラス方程式を解くために変数分離をすると，経度  $\lambda$  方向の関数  $\Lambda$

については微分方程式  $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + m^2\Lambda = 0$  が現れる．この一般解を示せ．

2. 日本における「標高」の基準点は千代田区永田町にある「(ア) 原点」で，その直下 24.3900 メートルに「(イ)」としての「(1)東京湾の平均海水面」があるとする．2 地点間の高さの差 (比高) は「(ア) 測量」によって (2)高精度 に測定できるが，「比高」を積分しても「標高」にはならない．これは「比高」が 2 地点間のどのルートを採用かで変化するためで，座標の関数として「標高」を与えるためにはある地点 P の「標高」は，地点 P と (イ) 上の (ウ) の差を，(エ) 線に沿った重力の平均値で割った量として定義される．(i)空欄 (ア～エ) に当てはまる語句を記せ．(ii) 日本では明治時代に下線部(1)のように定義されたが，(イ) を規定する (ウ) の数値を与える方が現代的である．その具体的数値を有効数字 3 桁程度で導け．計算過程も示すこと．(iii)下線部(2)が具体的にどの程度か答えよ．(iv)重力の単位として用いられる 1 gal を CGS 単位系 (cm, g, s のいずれかの組み合わせ) で表せ．

3. (i)GNSS (GPS) 測量から求まる高さを何と呼ぶか．(ii)前問の高さから「標高」を求めるためには，どうすれば良いか簡潔に説明せよ．



4. 右図は地球を中心とする見かけの太陽の年周運動を示す．(i) 点線は天の赤道である．実線は何と呼ばれるか．(ii)実線の面は赤道面に対して何度傾いているか答えよ．(iii)地球外の天体の座標は，図のような地球を中心とする赤道座標系を用いて「 $\alpha(J2000.0)=4h30m, \delta(J2000.0)=45^\circ 00'$ 」のように表現される． $\alpha$  と  $\delta$  をそれぞれ何と呼ぶか答えよ．(iv)この天体が日本(東経 135 度)で南中するのはおよそ何時(h)何分(m)か，午前/午後が分かるように答えよ．(v)「J2000.0」の記述がなぜ必要なのか 40-50 字程度で説明せよ．

5. 地球の自転角速度ベクトル  $\omega$  の変動には， $\omega$  の向きが (1 日より長い時間スケールで) 変化するタイプの運動と  $\omega$  の大きさそのものの変動がある． $\omega$  の向きの変化には，宇宙空間 (慣性空間) に対する変化としての (1)歳差・章動，地球固定座標系に対する変化としての (2)極運動 がある． $\omega$  の大きさそのものの変化は (3)1 日の長さの変化 として観測される．(i)下線部(1)は，「潮汐力」によるモーメント (トルク) が原因である．潮汐力自体は地球の昼側と夜側で反対向きに一年中働くが，太陽が前問のような見かけの運動を行うため，モーメントがゼロになる時期がある．図の a から d

のどの時期か、全て答えよ。(ii)月による潮汐力の効果も大きい。月の公転軌道面は図の実線の面に対して約  $5^\circ$  の傾きを持ち、この軌道面自体が長周期の歳差運動を起こし、9 秒角の最大の章動の原因である。こ

の長周期とは何年周期のことか。(iii)下線(2)の極運動は自転する地球固定座標系に対する運動なので、その支配方程式を得るためには、

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

回転座標系での角運動量保存則を用いる必要がある。角運動量を  $\vec{H} = I\vec{\omega}$  とすると  $d\vec{H}/dt + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{L}$  のようになる。いま地球を軸対称な回転楕円体は剛体とし、慣性モーメント  $I$ 、角速度ベクトル  $\vec{\omega}$ 、トルク(力のモーメント)  $\vec{L}$  は右のように与えられるとして、この式の三成分を記せ。(iv)かつて1日の長さは1秒の基準を与えるものだったが、下線部(3)が実測されるほど時計の精度が向上した結果、1秒の定義を変える必要が生じた。現在は、ある原子の特定の放射周期に基づいて1秒が定義されている。その元素名を答えよ。

6. 人工衛星 GRACE と GRAIL は、それぞれ地球と月の重力場を測定する双子衛星で、万有引力ポテンシャルを球面調和関数展開で得られるストークス係数  $C_{nm}, S_{nm}$  がデータとして配布されている。(1)双子衛星で重力場の空間分布が求める原理を、何を測定しているかに言及して、50 字程度で説明せよ。(2) GRACE に比べて、GRAIL の方が高い次数  $n$  まで求めることができたのは何故か。20 字程度で簡潔に説明せよ。

7. 地球(質量  $M$ ) を周回する人工衛星の運動は、近似的にはケプラーの法則に従うが、現実には様々な「摂動」が働く。最も大きな摂動は地球の  $J_2$  摂動である： $J_2$  は 2 次のストークス係数  $C_{2,0}$  と  $J_2 = -C_{2,0}$  の関係にある。地球を中心とする赤道座標系に対する衛星軌道は、軌道 6 要素で記述され、それらの時間変化は下の 6 つの式に従う。

ただし、 $R_e$  は地球の半径、 $n$  は「平均運動」(ケプラーの第 3 法則から求まる平均公転角速度) である。(i)問題 5 の極軸と赤道軸の

周りの慣性モーメント  $C$  および  $A$  を用いて、

$J_2 = (C-A)/MR_e^2$  と表せる。 $J_2$  の物理的な意味を地球の  $C$  および  $A$  の差に言及して 30 字程度で説明せよ。(ii) 要素  $e$ 、要素  $\Omega$ 、要素  $i$  の呼び名をそれぞれ記せ。(iv)慣性空間にある  $xyz$  座標系を人工衛星の軌道面内の近地点の方向に  $x$  軸を持つ

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$

ような座標系に変換する。そのためには、上の軌道要素のうちの 3 つを用いて 3 種の回転行列が必要で、座標軸を順次回転すればよい。3 つの回転行列を必要な軌道要素を用いて順番に記せ。