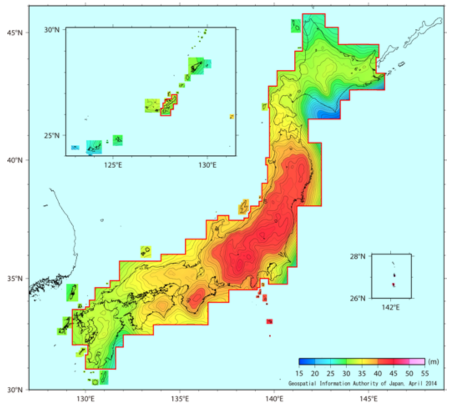
「宇宙測地学」期末試験問題(2021.2.2)

1. 球座標で定義されたラプラス方程式を変数分離すると，動径方向 r の関数 $R(r)$が満たす微分方程式は $n(n+1)$を定数として $\dfrac{1}{R}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)=n(n+1)$となる；$n$ は 0 以上の整数とする．以下の問いに答えよ．(1) $R(r)$の 2 階微分方程式の基本解は r^n と $1/r^{n+1}$ の二つなので，一般解は二つの定数 A と B を用いて $R(r)=\mathrm{A}r^n+\mathrm{B}/r^{n+1}$ となる．n=1 の時に実際に上の微分方程式を満たすことを示せ．(2)(1)の一般解が天体の重力ポテンシャルを表すためには, 定数 A あるいは B はどうあるべきか, 理由とともに述べよ.

2. 右図は「日本のジオイド」として国土地理院から公表されているジオイド高 N の分布である. 以下の問いに答えよ. (1)富士山の標高は 3776(m)とされる．右図より富士山でのジオイド高 N=45(m)と読むと富士山の楕円体高はどうなるか，計算せよ．(2)羊蹄山の標高は 1898(m)とされるが，基準を襟裳岬沖の海水面にするとどうなるか. 図から数値を読み取って定量的に説明せよ．(3)ジオイド高は全国で数 10(m)で変化している一方，ジオイド面上の「ポテンシャル数 W」は一定値である．W はどのような単位(次元)になるか，mks 単位系(meter, kilogram, second)を用いて答えよ．



3. 地球の自転角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の変化/変動には，（１日より長い時間スケールを持つ）$\boldsymbol{\omega}$ の向きの変化と $\boldsymbol{\omega}$ の大きさそのものの変化がある．$\boldsymbol{\omega}$ の向きの変化には，宇宙空間（慣性空間）に対する変化である(あ)<u>歳差・章動</u>, 地球固定座標系に対する変化である(い)<u>極運動</u>がある．$\boldsymbol{\omega}$ の大きさそのものの変化は(う)<u>１日の長さの変化</u>として観測される．(1)下線部(あ)のうち「歳差」運動のおよその周期を答えよ．(2) 下線部(あ)の「章動」には様々な潮汐周期を反映して各種の周期成分が含まれるが,「章動」の語源にもなっている長周期な成分とは何年周期のことか．(3)下線(い)の極運動は自転する地球固定座標系に対する運動なので，その支配方程式を得るためには，回転座標系での角運動量保存則を用いる．角運動量を $\vec{H}=I\vec{\omega}$とすると $d\vec{H}/dt+\vec{\omega}\times\vec{H}=\vec{L}$のようになる．いま地球を軸対称な回転楕円体は剛体とし，慣性モーメント I，角速度ベクトル $\vec{\omega}$，トルク(力のモーメント) $\vec{L}$は上のように与えられるとして，この式の三成分を記せ．(4)極運動は ω_1 と ω_2 の変化にあたる．角速度 $\vec{\omega}$を微少量 m_{i} (i=1,2,3)を用いて$\vec{\omega}=\Omega(m_1,m_2,1+m_3)^{\mathrm{t}}$ として(t は転置)，前問の結果に代入し，m_{i} 同士の二次以上の積を無視すると，

$$I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},\vec{\omega}=\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},\vec{L}=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$A\Omega\, dm_1/dt + (C-A)\Omega^2 m_2 = L_1, A\Omega\, dm_2/dt - (C-A)\Omega^2 m_1 = L_2$が得られる．ここからトルク 0 でも振動する解（固有振動/自由振動）を導き，その固有振動数の表現を記せ．(5)現実の地球で観測される前問の固有振動に相当する極運動を何と呼ぶか．(6)下線部(う)の実測値には季節変動が観測され，大気角運動量の変化で 9 割以上説明できるが，「下線部(3)が長くなる」とは大気角運動量がどうなることか，簡潔に述べよ．

4. 超長基線電波干渉法 VLBI に関して，以下の問いに答えよ．（1）VLBI の略称を省略せずに英語で記せ．(2) この手法の「電波源」は準星と呼ばれる天然の天体で，その位置は「α(J2000.0)=○h○m, δ (J2000.0)= ○°○′」のように指定される．α と δ はそれぞれ何を表すか答えよ．（3）前問の「J2000.0」は何を意味していて，なぜ示す必要があるのか，50 字程度で説明せよ．

5. GNSS の代表例である GPS 衛星に関する以下の文を読み，問いに答えよ．

『GPS 衛星群は，(あ)<u>軌道傾斜角</u> 55 度の 6 枚の軌道面それぞれに数台ずつ置かれ，全体で現在約 30 機からなる．通常の地球観測衛星と異なり，GPS 衛星には(い)<u>原子時計</u>が搭載され，全 30 機が全て名目上は(う)<u>UTC</u> に同期している．GPS 衛星からの送信電波はカーナビやスマホにも内蔵されている受信機で受け取られるが，受信機で分かるのは各衛星の軌道情報データ等と(え)<u>各衛星からの送信時刻と受信時刻の時間差</u>である．それらのデータに基づいて受信機側で地上座標値を計算し，緯度経度を求めているのであって，衛星が受信機の緯度経度を直接通知してくれるわけではない．GPS 衛星が送信する軌道情報データは，ある周波数の搬送波の変調によって地上に向けて送られている．全 30 機の GPS 衛星が同じ搬送波周波数を使っているにもかかわらず，「混信」せずに各衛星を区別できるのは，搬送波に軌道情報データを載せる前に(お)<u>PRN</u> で各衛星に固有の位相変調が施されており，その復調によって各衛星を識別し，前述の下線部(え)を得るためである．』(1)下線部(あ)はどこを基準にした角度か．(2)下線部(い)の元素名を二つ答えよ．(3)下線部(う)を日本語で述べよ．(4)下線部(え)に光速をかけて得られる距離データが 3 つあれば，未知数の地上の 3 次元座標が求まりそうだが，実際には最低でも 4 つ必要なのはなぜか．30 字程度で述べよ．(5)下線部(お)を日本語で述べよ．

6. GNSS を用いた「相対測位（干渉測位）」では，受信機と各衛星までの距離を搬送波位相で測定する．搬送波の波長を λ，衛星 A と受信機 1 の距離を $\rho^A{}_1$ とすると，サイクル数(何周期かを表す量)にして $\rho^A{}_1/\lambda$ サイクル分であり，位相角は $2\pi\rho^A{}_1/\lambda$ となる．例えば 24024.00 km の距離を波長 24.0 cm の搬送波で測るとサイクル数にして 1 億 10 万サイクルで，位相角はこれに 2π を掛けた値になる．しかし実際に時刻 t に受信機

1 で受信する衛星 A からの位相角 Φ_1^A は[0, 2π]（或いは[-π,+π]）に丸めこまれているため，Φ_1^A は衛星受信機間の距離 $\rho^A{}_1$ に相当する絶対的な位相角から，2π の整数値倍 $2\pi N^A{}_1$ を引いた量になる：ただし $N^A{}_1$ は未知数．また，衛星 A および受信機 1 上の時計の全世界共通の時計からの同期誤差 δt^A と δt_1 も未知量になる．電離層と対流圏のマイクロ波伝搬に伴う効果を無視できるとすると，現実に測定される位相 Φ_1^A は次式のように表せる：(1)右式の周波数 f として GPS で実際に採用されている値を単位も含めて二つ記せ．(2)この式で左辺は観測データとして与えられるが，右辺には未知数が多すぎてこのままでは解けないため，「二重位相差」という手法が用いられる．この手法の概要を 50~100 字程度で適宜数式を用いて説明せよ．ただし，求めたい未知数は固定点に対する地上観測点の相対位置とし，衛星軌道は既知とする．

$$\Phi_1^A = \frac{2\pi}{\lambda}(\rho_1^A - N_1^A\lambda) + 2\pi f(\delta t^A - \delta t_1).$$

7. 現実の GNSS 測量や他の宇宙測地技術でも，電離層や対流圏内の屈折率 $n(\equiv c/v_p)$が真空とは異なるために電波伝搬距離が見かけ上変化することを考慮する必要がある．特に電離層における位相伝搬速度 v_pに対する屈折率は $n_p = 1 - \dfrac{C \cdot N_e}{f^2}$で与えられる．ここで f はマイクロ波の周波数， N_eは自由電子の数密度(1/m³)， Cは正の定数である．真空中と比べた電離層での見かけの伝搬距離変化は $\Delta S = \int (n_p - 1)ds$と表せるので($ds$は経路上の微小な距離要素)，$\Delta S$は，マイクロ波の周波数の二乗に(ア)し，$N_e$ は数密度なので積分経路に沿った(イ)当たりの(ウ)に(エ)することがわかる．また同じマイクロ波でも異なる二つの周波数では，周波数の(オ)方が電離層の影響を大きく受ける．一方，地球の対流圏での屈折率 n はある点での気圧 P (hPa),水蒸気分圧 e (hPa),気温 T(K)を用いた以下の「分極」の理論に基づく経験式で計算できる:

$$N_T \equiv (n-1)\times 10^6 = 77.6\frac{P}{T} - 5.6\frac{e}{T} + 3.73\times 10^5\frac{e}{T^2}.$$

(1)：空欄(ア)から(オ)に当てはまる適切な語句を答えよ．(2)異なる二つの周波数(f_1, f_2)による観測を行えば電離層効果が補正できることを，真の距離を S として，式を用いて説明せよ．(3) N_Tの式には気圧 P,水蒸気分圧 e,気温 Tが現れる．これら 3 つのうちで，一般に最も時空間的な変動(平均値周辺の変化)が大きいのはどれか．(4)地上のある地点で一つの GNSS 衛星を追跡したところ，朝 10 時頃に地平線から昇って（低い“仰角”），午後 13 頃に最も高高度（高い“仰角”）に達し，午後 4 時頃に再び地平線に沈んだ．この GNSS 衛星と観測地点間の対流圏遅延量は，時間とともにどのように変化するか，30 字程度で説明せよ．ただし地球大気は水平成層構造であり，観測中の気象変化は無いとする．

8. 差分干渉合成開口レーダー(InSAR)を用いて地震に伴う地表変位を求めよう．まず，地震前と地震後にそれぞれ撮像された SAR 画像の [a]位置合わせを行う．次に，地震後と地震前の位相差を計算する．もしも 2 回の撮像時の衛星位置が同一で，大気や電離層の状態も完全に等しければ，この位相差を用いて人工衛星と地表の距離変化を求めることができる．実際にはそうではないため，計算した位相差には[　(ア)　]縞，[　(イ)　]縞，水蒸気や電離層の擾乱に伴う位相変化，そして地表変位に伴う位相変化の和が観測される．このうち，[　(ア)　]縞と[　(イ)　]縞は衛星位置の[　(ウ)　]基線長に比例する．これら様々な要素を除去し，地表変位に起因する位相変化のみを抽出すると, その位相変化$\Delta\varphi$と距離変化Δrは[　(エ)　]という式で関係づけられる．なお，[b]地震前と地震後の撮像時期が大きく離れると，地表変位を検出することはできなくなる.

問題 1: 空欄(ア)〜(エ)に当てはまる最も適切な数式または語句を答えよ.

問題 2: 下線 a ではアフィン変換を用いる. あるビルが 1 つ目の SAR 画像の座標(x_1, y_1)と 2 つ目の SAR 画像の座標(x_2, y_2)に映っており,

$$x_2 = a\,x_1 + b\,y_1 + p,\ y_2 = c\,x_1 + d\,y_1 + q$$

という式が成立する時，このアフィン変換を行列とベクトルを用いて示せ.

問題 3: 下線 b について，搬送波の波長が短い場合には，この現象がより顕著になることについて，その理由を答えよ.

問題 4:

(1) 地表から衛星を向く単位ベクトルを$\boldsymbol{e}$とする．地表変位ベクトルが$\boldsymbol{u}$である時、衛星視線方向の距離変化Δrを表す式を答えよ．衛星と地表の距離が短縮する時，Δrは負とする.

(2) 4 つの異なる方向にある衛星から, 同一領域の InSAR 画像を各 1 枚取得したとする．地表からi番目の衛星方向への単位ベクトルを$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} e_{ix} \\ e_{iy} \\ e_{iz} \end{pmatrix}$とする．$i$番目の衛星と地表の距離変化を$\Delta r_i$として，観測された衛星地表間の距離変化を$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \end{pmatrix}$と表す時，ベクトル$\boldsymbol{d}$と地表変位ベクトル$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$を関係づける行列$\boldsymbol{G}$の要素を示せ．また，地表変位ベクトル$\boldsymbol{u}$を$\boldsymbol{d}$と$\boldsymbol{G}$を用いて最小二乗法により推定する式を示せ.