

「宇宙測地学」 中間試験問題(2020.12.11)

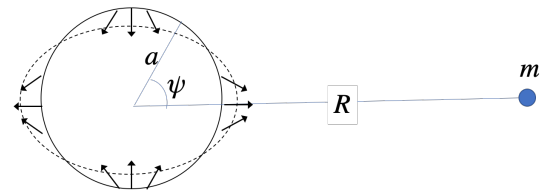
1. 質点(質量) M による万有引力ポテンシャル V は、測地学で重力ポテンシャルを導入するときは $V=GM/r$ (>0)と定義されるが、力学ではしばしば $V=-GM/r$ (<0)と定義される： G は万有引力定数。(1)それぞれの定義で、 $\nabla V(\text{grad}V)$ の向きは中心からの距離 r が増える方向に向くか、減る方向に向くか答えよ。(2)地上の重力加速度には、質量 M による万有引力ポテンシャルのほかに遠心力ポテンシャルも加わる。自転角速度を ω 、緯度を φ として遠心力ポテンシャル ψ_c の式を導け。(3) $\nabla\psi_c$ は距離 r が増える方向に向くか、減る方向に向くか答えよ。

2. 地球に固定された地心直交座標系における座標値 (x,y,z) の関数である重力ポテンシャル $W(x,y,z)$ と重力加速度ベクトル \vec{g} の関係について以下の問いに答えよ。(1)重力加速度ベクトル \vec{g} は重力ポテンシャル $W(x,y,z)$ の数学的な空間微分で定義すれば3成分あるが、地上で測定される重力加速度は(ベクトル量だが)1成分であり、実際に重力異常図などは1枚(1成分)の図が与えられるだけである。これが何故かを重力加速度の「向き」の定義を含めて20字程度で説明せよ。(2)(1)の向きに沿って測った高さから、ある地点の(正)標高 H が求められる。国道沿いに平均して2.5kmに一点は設置される標高の基準点のことを何と呼ぶか。(3)国土地理院の地図で前問の基準点はどうような記号で表現されているか記せ。

3. 問題2の座標値 (x,y,z) と緯度 φ と経度 λ は右の式で結びつけられる。ただし a と b はそれぞれ回転楕円体の長半径と短半径である。以下の問いに答えよ。(1) N を何と呼ぶか。(2) $h=0$ のときの (x,y,z) は回転楕円体上にあることを利用して、 N の表式を導け：途中の式を省略しないこと。(3) h は「楕円体面」からの高さであるのに対して、標高 H は何からの高さか答えよ。

$$\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z = ((b^2/a^2)N+h)\sin\varphi \end{cases}$$

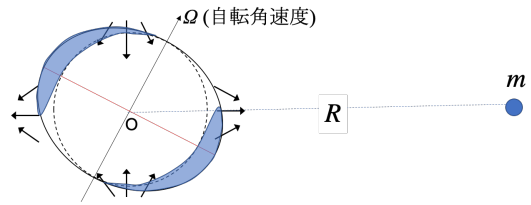
4. 右図のような半径 a の球状の(仮想)地球が距離 R だけ離れた質量 m の天体から万有引力を受ける時、その万有引力ポテンシャルで (a/R) を微小量としてテイラー展開したときの3番目の項が



潮汐力ポテンシャル $U = -\frac{Gma^2}{2R^3}(3\cos^2\psi - 1)$ である。(1) ψ が 0 から 2π と変化する

ときに U がどう変化するかを図示せよ： $3\cos^2\psi - 1 = (\cos 2\psi + 1)/2$ を利用し、横軸 ψ 、縦軸 U の図に示せ。(2) U を空間微分すると上図の矢印のような潮汐力分布になる。この状況では潮汐力 \vec{f} が球状地球にもたらすモーメント $(\vec{r} \times \vec{f})$ の総和はゼロになることを説明せよ。(3)(2)の分布自体は仮想地球と質量 m の位置関係で決まっており、

地球の自転/公転とは無関係であるが、実際の地球は自転して赤道部にふくらみを持つ回転楕円体で、質量 m が太陽だとすると潮汐力分布と地球の向きの関係は下図のようになることもある。この状況で om の下側にある(右下の)水色部分が受ける潮汐力によるモーメントの向きを答えよ。(4)右図の回転楕円体で水色部分を除いた部分が受ける潮汐力モーメントはどうなるかを述べよ。(5)質量 m が太陽であるとき潮汐力モーメントは一年を通じて、どう変化するか述べよ。



5. 以下の文中の空欄(ア)～(サ)に当てはまる適当な語句や数値を答えよ。

『1日の24時間とは仮想的な「(ア) 太陽」の南中から南中までで定義され、かつての1秒の定義はこの(イ)分の1であった。現実に見える太陽は特に「(ウ) 太陽」と呼ばれる。「(ウ) 太陽」の南中から南中までを24時間と決めるとわかりやすいが、一年のなかで時期によって24時間の長さが変わってしまう。これは(ウ)太陽と(ア)太陽の差で(エ)と呼ばれる。世界時0 (UT0) の定義でも(ア)太陽の概念は現れるが、実際には(オ)の観測で実装されるため、 $UT0 \equiv \text{グリニッジ (オ) 時} + 12\text{h} - \alpha$ と定義される：ここで α は(ア)太陽の(カ)である。UT0から(キ)の効果を補正したものをUT1とよび、この時間微分が地球の現実の自転角速度を与える。過去には(オ)の南中時刻(子午線通過時刻)が時計の精度検証に使われたが、1930-40年代には独立に進歩した(ク)時計の精度向上によって一日の長さが経年的に長くなっていることが認識された。現在の1秒の定義は(ケ)原子の特定の放射周期を利用した半永久的に不変な量になっていて、国際原子時TAIはこれに基づく。実際に使われている時系はUTCと呼ばれるもので、これはTAIの1秒を採用しつつも、UT1に近いものとなっており、地球の現実の自転加速度に「忠実」に定義されている。1958年にはUTCとUT1は一致していたが、(オ)観測で決まるUT1とのズレは次第に増加している。|UT1-UTC|が(コ)秒に収まるように、数年に一度(サ)が導入される。これをしないと、星の南中時刻が定時ではなくなってしまう。』

6. 質点としての地球(質量 M)のまわりを運動する人工衛星(質量は M より十分小さい)

の運動方程式は $\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ と表せる:ベクトル \vec{r} が人工衛星の位置ベクトル。(1)単位

質量あたりの角運動量ベクトルを $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ として、 $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ が時間変化しないことを導け。(2)ベクトル $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ の向きと大きさを図示して説明せよ。

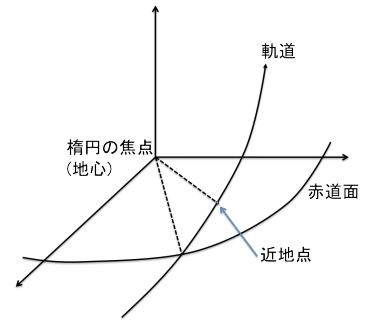
7. 前問の運動方程式は地球も人工衛星も質点としているが、摂動効果として最も大きな $J_2(=-C_{20})(>0)$ の効果を考慮すると、軌道要素の時間変化は右の 6 つの式に従う。 R_e は地球半径である。以下の問いに答えよ。(1) 右下の図は衛星軌道面と赤道座標の関係を示す。(i) 近地点引数 ω , (ii) 軌道傾斜角 i , (iii) 昇交点経度 Ω はそれぞれどういう量であるかをこの図を写して図示せよ。(2) 焦点(地心)から近地点までの距離を a と e を用いて表せ。(3) 「太陽同期軌道」は J_2 摂動を積極的に利用した軌道と言えるが、これは右のどの式をどのように利用している衛星か、説明せよ。(4) 「地球同期軌道」とは、どのような衛星軌道のことを指すか、説明せよ。

$$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$



8. SLR に関する以下の問いに答えよ。(1) SLR の R が何を示すか、英語とその意味を記せ。(2) SLR 用に衛星に必ず搭載されている地上からの Laser パルスを“はね返す”ための装置を何と呼ぶか。(3) (2)の装置を月面に置くと LLR が可能になるが、実現するには SLR における何を変更する必要があるか、簡潔に答えよ。(4) SLR の観測から $J_2(=-C_{20})$ の時間変化が検出されており、1970 年代から 1990 年代には減少していた。 J_2 は極軸と赤道軸の周りの慣性モーメント C および A を用いて $J_2=(C-A)/MR_e^2$ と表せることを踏まえ、 J_2 の減少とは地球がどうなっていることを示すかを簡潔に述べよ。

9. 前問の SLR は J_2 などの地球重力ポテンシャルの低次の展開係数の決定に貢献してきたが、GRACE (および GRACE-FO) によって、より高次の 60 次までの展開係数が月に 1 回の頻度で得られている。また GRACE の月面版である GRAIL によっても高次の展開係数を得ることができた。GRACE および GRAIL による重力場測定の原理を、どんな衛星を使って何を測定量としているかを含めて 50-60 字程度で説明せよ。