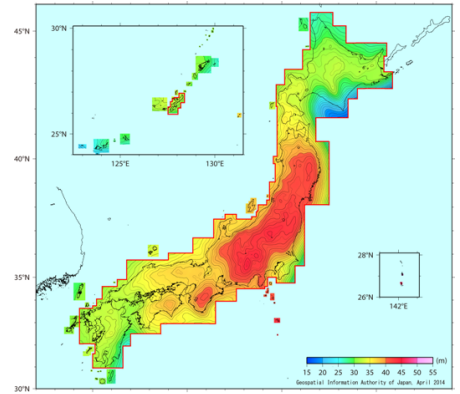


「宇宙測地学」 期末試験問題(2022.1.28)

導出過程も記すこと． 字数制限は厳密に拘る必要はない．

- 右手系で xyz 軸を持つ直交座標系を考える．(1)この座標系を z 軸の周りに反時計回りに γ だけ回転させるための回転行列を $R_3(\gamma)$ とする：下付き添字 3 は z 軸を意味する． $R_3(\gamma)$ を方向余弦を用いて導け．(2)同様に $R_1(\alpha)$ を導け：下付き添字 1 は x 軸を示す．(3)角度 γ と角度 α が十分小さいときの $R_3(\gamma)$ および $R_1(\alpha)$ の表現をそれぞれ記せ．

- 右図は「日本のジオイド」として国土地理院から公表されているジオイド高 N の分布である．以下の問いに答えよ．(1)国土地理院が定める日本の水準原点の標高(m)を有効数字一桁(可能ならば二桁)で答えよ．(2)前問の標高は東京湾の平均海面が基準で，富士山の標高 3776(m)もこの基準に基づく．右図から必要な場所のジオイド高を読み取って富士山の楕円体高を求めよ．(3)羊蹄山の標高は 1898(m)とされるが，標高の基準を襟裳岬沖の海面にするとどうなるか．図から数値を読み取って求めよ．(4)ジオイド高は全国で数十(m)変化しているが，ジオイド面を決める「ポテンシャル数 W 」は一定値 W_0 で全世界共通の標高基準になりうる． W_0 の実際の値はどうか，単位も含めておおよその数値を求めよ．(注:図のスケールは最小 15m から 5m おきに最大 55m)



- 地球(半径 R_e)を周回する人工衛星の運動は，赤道座標系に対する軌道要素を用いて記述される．現実の地球を周回する人工衛星への最も大きな摂動である $J_2(=-C_{20}=-1.08 \times 10^{-3})$ の効果を考慮すると，軌道要素の時間変化は右の 6 つの式に従う．ただし， n は「平均運動」(ケプラーの第 3 法則から求まる平均公転角速度) で定数である．以下の問いに答えよ．(1)最初の 3 つの式は J_2 の効果があっても a, e, i が一定であることを示す． a, e, i それぞれを何と呼ぶか答えよ．(2) C_{20} は $l=2, m=0$ のストークス係数で，地球中心からの距離 r ，緯度 ϕ を用いて次式で定義される：

$$C_{20} = \frac{1}{2MR^2} \iiint r^2 (3\sin^2 \phi - 1) dM$$

これを以下の 3 つの慣性モーメント A, B および C

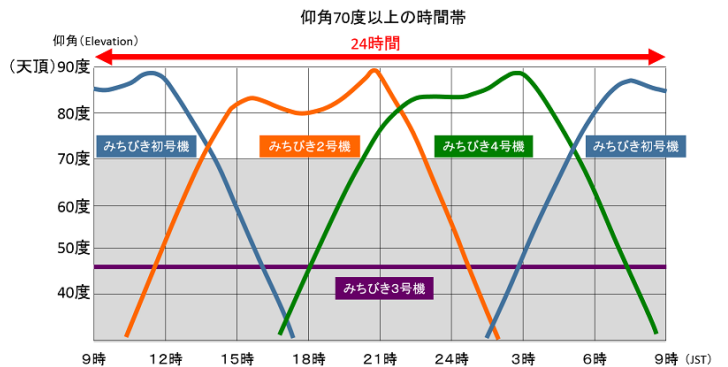
$$A = \iiint (y^2 + z^2) dM, \quad B = \iiint (z^2 + x^2) dM, \quad C = \iiint (x^2 + y^2) dM$$

を用いて表せ．ただし A, B および C はそれぞれ x, y, z 軸の周りの慣性モーメントである．(3) $d\Omega/dt = 0.9863^\circ/\text{day}$ にすれば Ω は一年かけて 360° となる． $d\Omega/dt > 0$ であるため

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{di}{dt} = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i, \\ \frac{dM}{dt} &= n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1). \end{aligned}$$

の i への制約条件を根拠を含めて 20 字程度で説明せよ. (4)前問(3)のような $d\Omega/dt=0.9863\%/day$ とそれを満たすような i を持つ軌道を太陽同期軌道と呼び, 多くの地球観測衛星で採用されている. この軌道の特長を 2 点, それぞれ 30 字程度で説明せよ.

4. GNSS 衛星に関する以下の問いに答えよ. (1)米国の GPS 衛星は現在ほぼ 30 機あり, 全てが 0.5 恒星日で周回している. 0.5 恒星日とは何時間何分か. (2)前問の情報から GPS 衛星の高度を求めるための方法を簡潔に説明せよ. (3)日本版 GPS と呼ばれる「みちびき」(QZSS)は現在 4 機体制である. 下図はある日に, つくば市からみて何時にどの仰角(水平線から見上げる角度)に見えるかを示す. みちびき 3 号機だけ仰角が一定である理由を簡潔に説明せよ. (4) 1, 2, 4 号機はともに $e=0.1$, 1 恒星日で周回する軌道であるため, 1 恒星日での仰角の変化の仕方は似ているが, 70 度以上の仰角で常に一機は入れ替わりで見えるように, ある軌道要素だけ 3 機で異なっている. その軌道要素を答えよ. (5) QZSS は $e=0.1$ で GPS では $e=0.003$ である. QZSS がより楕円に近いのは, どのような意図があるためか, 30 字程度で説明せよ. (6) 通常の GPS 測位に比べて, 準天頂衛星であるために飛躍的に低減が期待されるノイズ源(効果)を何と呼ぶか, 答えよ.



5. GNSS の「相対測位 (干渉測位)」では受信機と各衛星までの距離を (あ) 波の位相で測定する. (あ) 波の波長を λ , 衛星 A 受信機 1 間の幾何学的距離を ρ_1^A とすると, この距離に相当する位相角(radian)は (い) である. しかし, 実際に時刻 t に受信機 1 で受信する衛星 A からの位相角 Φ_1^A は $[0, 2\pi]$ (或いは $[-\pi, +\pi]$) に丸めこまれているため, Φ_1^A は衛星受信機間の距離 ρ_1^A に相当する位相角 (い) に, 2π の整数倍 $2\pi N_1^A$ を加えた量になる (ただし N_1^A は未知). また, 衛星 A および受信機 1 の時計は全世界共通の時計と完全に (う) しているわけでもないため, それぞれの (う) 誤差 δt^A と δt_1 も位相データに新たな未知量として加わる. 「相対測位 (干渉測位)」では, 二週間程度後に公表される (え) 暦を用いて, より精度の高いデータを得る. 以下の問いに答えよ. (1)空欄 (あ) ~ (え) に当てはまる適切な語句, 数値または式を記せ. (2)観測される位相データ Φ_1^A は対流圏や電離層による誤差要因は無視すると, $\Phi_1^A(t) = (\text{い}) + 2\pi N_1^A + 2\pi f(\delta t^A - \delta t_1)$ と表せる: ここで GNSS の送信電波の周波数を f とした. ここで δt^A と δt_1 を消去するための「二重差をとる」操作について, 別の受信機 2 での衛星 B からのデータ Φ_2^B を用いるとして説明せよ.

6. 多くの宇宙測地技術では、マイクロ波(或いはレーザー)の送信源(或いは送信機)から受信源(或いは受信機や反射源)までの到達時間(或いは往復時間やその時間変化率)が基本的な観測量である。送信源と受信源の組み合わせには、(a)星等の天体と地上局、(b)人工衛星と地上局 (或は地上局と人工衛星)、(c)人工衛星と人工衛星の三通りがある。以下の問いに答えよ。

(i) 下線部(a)の天体として“準星”を用いる技術が VLBI で、準星の位置座標と地球上の観測点の位置座標を関連づけることになるので、人工衛星を用いる下線部(b)や(c)の技術にはない独自性がある。どんな現象の観測に向いているか、現象の名称を述べよ。

(ii) 下線部(b)の技術で、特に地表から人工衛星に向けてレーザーを照射する技術を SLR と称する。このうち R が示す英単語を記せ。

(iii) 日本が 1986 年に打ち上げ、今も周回中の SLR 用の衛星の愛称を答えよ。

(iv) 下線部(b)で人工衛星の代わりに月を用いた場合は LLR と呼ばれるが、いずれの場合も Corner Cube Reflector(CCR)の設置が必要である。CCR の持つ宇宙測地技術としての性質を簡潔に述べよ。

(v) 下線部(c)の技術は、地球の GRACE、月の GRAIL という衛星重力ミッションで用いられた。GRAIL 衛星の高度は約 50km であったのに対し、GRACE 衛星の高度は約 500km である。この高度の違いから、測定される重力場の空間分解能が低くなる(解像度が悪い)と予想されるのは月と地球のどちらかを答えて、その理由を 30-50 字程度で述べよ。

(vi) 下線部(a)と(b)の技術で精密測位を行う場合、マイクロ波が電離圏と対流圏を伝搬する際に生ずる効果を見捨てることはできない。これは屈折率 n が真空の値と異なるため、特に電離層における位相伝搬速度 v_p に対する屈折率は $n_p = 1 - 40.3 N_e / f^2$ で与えられる；ここで f はマイクロ波の周波数、 N_e は自由電子の数密度(>0)。これより電離層中での位相伝搬速度は真空中と比べて (ア)。また、電離層での見かけの伝搬距離変化は $\Delta S = \int (n_p - 1) ds$ と表せるので (ds は経路上の微小な距離要素)、 ΔS はマイクロ波の周波数の二乗に (イ) し、積分経路に沿った (ウ) 当たりの (エ) に (オ) することがわかる。空欄(ア)から(オ)に当てはまる適切な語句を答えよ

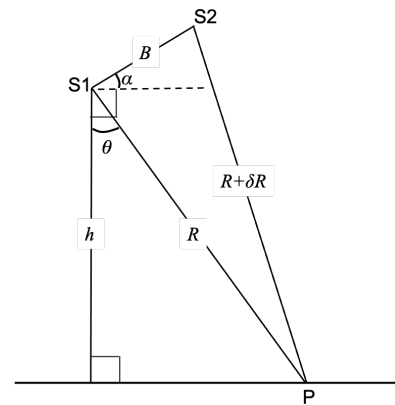
(vii) 対流圏での屈折率 n は気圧 P (hPa)、水蒸気分圧 e (hPa)、気温 T (K) を用いた以下の

$$N_T \equiv (n - 1) \times 10^6 = 77.6 \frac{P}{T} - 5.6 \frac{e}{T} + 3.73 \times 10^5 \frac{e}{T^2}.$$

精密測位のためには対流圏の電波伝搬補正も必要だが、電離層遅延補正に比べて難しい。実際の電離層補正手法に言及して、なぜ難しいかを 30-50 字程度で説明せよ。

7. 干渉合成開口レーダー(Interferometric SAR/InSAR)で現

れる干渉縞はヤングの干渉縞の生成原理と同じで、ヤングの実験での二つのスリットが SAR の二つの衛星軌道(図の S1 と S2)に対応している。InSAR の基本的観測量は二つの衛星軌道で得られる位相データの差 ψ である。(a)画像中の各ピクセル内での電波反射特性に変化がなければ、ある点 P の位相(差) ψ は右図の衛星視線距離変化 δR とマイクロ波の波長 λ を用いて、



[(ア)]のように表せる。InSAR の実際の干渉縞に

は、[(イ)]縞, [(ウ)]縞, 水蒸気や電離層の擾乱に伴う位相変化, そして地表変位に伴う位相変化の和が含まれている。これら様々な要素から地表変位による位相変化のみが抽出されるが、実際は(b)地表三次元変位ベクトル U の三成分が観測されるわけではなく, 衛星視線方向へ投影された量が観測される。衛星視線方向への単位ベクトル n を用いると, 地表変位に起因する位相変化は[(エ)]のように表せる。 図の S1 と S2 での SAR の撮像が二つの異なる時期に行われる場合について、以下の問いに答えよ。

- (1)空欄(ア)~(エ)に当てはまる適切な語句または数式を答えよ。(2)InSAR データの位相差 ψ は(ア)のように δR で表現できるが、この δR を図中の S1-S2 間の距離 B と図中の二つの角度 θ と α を用いて表し、図の距離 B を S1-P 方向へ投影した量(B_{\parallel})で表せることを示せ。ただし R は $B, \delta R$ に比べて十分大きいとし、余弦定理を使う。(3)位相差 ψ が R に応じてどう変化するかを調べるために、 $\partial\psi/\partial R$ を図中の角度 θ と α を用いて表し、 B_{\parallel} と直交する B_{\perp} に比例することも示せ。(4)下線部(a)の条件は撮像時期が離れるほど成立しなくなるため、地表変位の検出も難しくなる。特にマイクロ波の波長が短いほど困難になるのは何故か、30 字程度で述べよ。(5) S1 と S2 における SAR 画像の取得が二つのアンテナを用いて同時に行われたことがある(スペースシャトルによる観測)。単一アンテナによる二つの異なる時期の観測を使わずに、このような観測を行ったのはなぜか、簡潔に説明せよ。(6)下線部(b)により、InSAR データから地表三次元変位ベクトルを推定するためには最低でも三方向からの観測が必要である。いま、四方向から観測した InSAR のデータベクトル $\mathbf{d}=(d^1, d^2, d^3, d^4)^t$ (t は転置)があり、 \mathbf{d} に基づいて三次元変位ベクトル $\mathbf{m}=(U_e, U_n, U_d)^t$ を最小二乗法で推定したいとする：ただし U_e, U_n, U_d は東西, 南北, 上下方向の変位成分。 $\mathbf{d}=\mathbf{G}\mathbf{m}$ とする時の行列 \mathbf{G} (計画行列/Design matrix という)がどうなるか、全成分を含めて記せ。ただし j 方向の衛星視線方向への単位ベクトルを $\mathbf{n}^j = (n_e^j, n_n^j, n_d^j)^t$ とする。(7)前問の最小二乗解を \mathbf{d}, \mathbf{G} を用いて記せ。