「宇宙測地学」中間試験問題(2021.12.3)

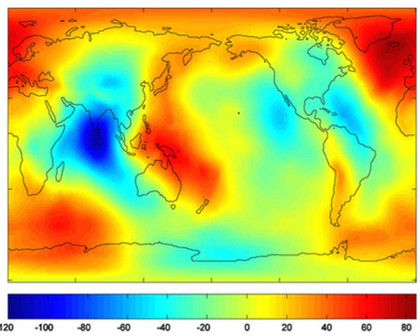
1. 球座標系のラプラス方程式を変数分離すると，経度 λ 方向の関数 Λ については微分方程式 $\dfrac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+m^2\Lambda=0$ が現れる：但し m を定数．この一般解を三角関数で表せ．

2. 地球に固定された地心直交座標系での座標値(x,y,z)と従来から用いられてきた緯度 φ と経度 λ は右の式で結びつけられる．但し a と b はそれぞれ回転楕円体の長半径(赤道半径)と短半径(極半径)で z 軸が極方向を向く．以下の問いに答えよ．(1)回転楕円体の扁平率 f の定義を記せ．(2) N を何とよぶか答えよ．(3) h=0 のときの(x,y,z)は回転楕円体上にあることを利用して，N の表式を導け：途中の式を省略しないこと．(4)旧来の測地学では緯度 φ も経度 λ も天文観測によって決められていたが，経度 λ の測定の方が困難を極めた．その理由を経度測定の原理も含めて説明せよ(60-80 字程度)．(5)現代測地学では上式の(x,y,z)から緯度 φ と経度 λ が計算されるが単純ではない．緯度 φ の最初の近似値を得るために必要な式を x,y,z を用いて表せ：必要ならば$e^2\equiv(a^2-b^2)/a^2$を用いても良い．

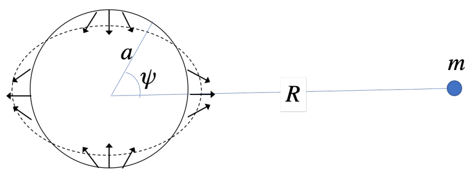
$$\begin{cases} x=(N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y=(N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z=(b^2/a^2+h)N\sin\varphi \end{cases}$$

3. 重力ポテンシャル W は座標値 x,y,z の関数で $W(x,y,z)$と表せる．(1)重力加速度ベクトル $\vec{g}$は W を用いてどのように定義されるか記せ．(2) 地表の $\vec{g}$を生み出す二つの力を記せ．(3)等ポテンシャル面と重力加速度ベクトルの幾何学的な関係を W の全微分(変分)dW を用いて説明せよ．但し dW とは，ある位置$\vec{x}$での $W(\vec{x})$とそこから微小距離$\mathrm{d}\vec{x}$だけ離れた位置での $W(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})$の差 $dW= W(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x})-W(\vec{x})$で，微少量の 2 次以上の積は無視する．(4)正標高 H は，dW をジオイド面から地表面に向けて$\mathrm{d}\vec{x}$を $\vec{g}$と反対方向に沿って積分して得られる地表とジオイド面の二点間の重力ポテンシャルの差とその間の平均重力値で表せる(定義される)ことを導け．(5)日本の水準原点の直下 24.3990 m に東京湾の平均海水面があるとしているが，この定義の問題点を測地学的な観点で簡潔に述べよ(20 字程度)．

4. 右図は近年の重力観測衛星で得られたデータに基づくジオイド高（単位は meter）である．日本列島を含む西太平洋域やアンデス山脈のジオイド高が比較的高いのは何故か，どう解釈されているかを 50-80 字程度で説明せよ．但し，インド洋にかけての負の異常は考慮しなくて良い．



5. 前問のジオイド高データは近年日本列島周辺においても精緻化されている．その理由を宇宙測地技術の普及を踏まえて 50 字程度で説明せよ．



6. 右図の半径 a の球状の(仮想)地球が中心から距離 R 離れた質量 m の天体から万有引力を受ける時，その万有引力ポテンシャルで(a/R)を微小量としてテイラー展開したときの 3 番目の項が潮汐力ポテンシャル$U = -\frac{Gma^2}{R^3}P_2(\cos\psi)$である．図の角度$\psi$は球面上の 2 点 P$(\theta, \lambda)$と Q$(\theta', \lambda')$を見込む角であり， $\cos\psi$はθ, λとθ', λ'で表現できる(レポート課題で既出)．ここで点 P を地球上の地点，点 Q を月(或いは太陽)と考えて，加法定理を用いると
$P_2(\cos\psi) = P_2^0(\cos\theta)P_2^0(\cos\theta') +$
(1/3) $P_2^1(\cos\theta)\, P_2^1(\cos\theta')\cos(\lambda - \lambda') + (1/12)P_2^2(\cos\theta)\, P_2^2(\cos\theta')\cos[2(\lambda - \lambda')]$
のように 3 つの項に分けられる．(1)第 1 項から第 3 項が地球上で生み出す潮汐ポテンシャルの空間パターンをそれぞれの項について図示せよ．(2) 点 Q を月とした場合，θ'はどのように時間変化するか簡潔に説明せよ．(3) 点 Q が月であれ太陽であれ，λ'には地球の自転も反映される．その結果として第 2 項と第 3 項はそれぞれどのような時間変化をするか，簡潔に説明せよ．
7. 以下の(ア～コ)に当てはまる語句や数値を答えよ．1 秒はかつて 24 時間(=3600 秒×24=86400 秒)を 86400 で割った量として定義されていた．24 時間とは仮想的な“平均太陽”の（ア）から（ア）までの時間であり，英国グリニッジでの平均太陽時を Universal Time(UT)と呼ぶ．一方，地球の自転周期は 24 時間ではなく（イ）であり，実在しない“平均太陽”ではなく（ウ）の観測から分かる．（ウ）の観測に基づく時刻を「（ウ）時」という．但し UT0 はグリニッジ（ウ）時が平均太陽の（エ）と一致する時刻に（オ）を加えた時刻として定義されている．UT の決定とは独立に 1930-40 年代には（カ）時計が発達して，一日の長さが経年的に長くなっていることが発見された．現在の 1 秒の定義は（キ）原子の特定の放射周期を利用した半永久的に不変な量になっているが，過去の 1 秒の定義上の問題[1]で UT そのものを時刻系にすると（ア）時刻が少しずつズレてくる：出来るだけ「平均太陽時」にしたい．そこで数年に一度（ク）が導入される．一方，現実の太陽に基づいた時刻系を「（ケ）時」と呼び，平均太陽時からの系統的なズレは（コ）と呼ばれる．
8. VLBI に関して，以下の問いに答えよ．(1) VLBI とは何の略称か，正式名称を英語で記せ．(2) この手法では地球から十分遠方にある（ア）と呼ばれる電波星から発せられる自然の電波（ノイズ）を地球上の少なくとも（イ）点で受信/記録し，その到達時間差を測定する．元々のノイズデータを忠実に記録する必要から（ウ）時計が併

---

[1] 自転角速度の経年的低下の効果は定量的には説明できない程度の量である。

設される．空欄(ア〜ウ)に当てはまる適切な語句や数値を答えよ．(3)前問の到達時間差(とその変化率)は観測点間の距離と宇宙空間での地球の向きに依存するので，VLBIは地球回転観測に用いられる．潮汐力によるモーメントを原因とする二種類の地球回転変動を列挙せよ．(4)前問の二種類の運動のそれぞれについて，どんな運動でどのように時間変化するかを 30-50 字程度で説明せよ．(5)電波源の位置は「α(J2000.0)=◯h◯m, δ (J2000.0)= ◯° ◯′ 」のように指定され，「J2000.0」は元期と呼ばれる時刻を意味する．具体的にいつのことか，出来るだけ正確に述べよ．

9. z 軸まわり対称な回転楕円体の運動を，この楕円体に張り付けた角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転する座標系で考える．ただし回転楕円体は剛体とし，慣性モーメントテンソル I は右式のように対角化され，角速度ベクトル $\vec{\omega}$，トルク(力のモーメント) $\vec{L}$ は右のように与えられるとする．この回転座標系での角運動量

$$I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \vec{\omega}=\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \vec{L}=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{H}=I\vec{\omega}$ の保存則は $d\vec{H}/dt+\vec{\omega}\times\vec{H}=\vec{L}$ である．以下の問いに答えよ．(1)この角運動量保存則の式を三成分に分けて記せ．(2)角速度ベクトル $\vec{\omega}$ がほぼ z 軸方向を向き，回転運動の揺らぎは小さいことから，1 に比べて十分小さい量 m_i (i=1,2,3)を用いて $\vec{\omega}=\Omega(m_1, m_2, 1+m_3)^t$ と表す：ここで「t」は転置を示す．3 つの m_i (i=1,2,3)のそれぞれは，どのような地球回転変動に対応するか述べよ．(3)問(1)の結果を前問の $\vec{\omega}$ を用いて m_i の一次項まで残すと固有振動(自由振動)が得られる．その固有振動数の表現を導け．(4)前問の表現に地球の値を代入すると周期 305 日の振動(運動)が期待されるが，現実に地球で観測されている運動について 30-40 字程度で説明せよ．

10. 質量 M と m の二つの質点を考え，それぞれの位置ベクトルを $\vec{r_1}$ と $\vec{r_2}$ とし，M から m へ向かうベクトルを $\vec{r}\equiv\vec{r_2}-\vec{r_1}$ とする．(1) M と m それぞれの加速度を $\ddot{\vec{r_1}}$ と $\ddot{\vec{r_2}}$ として，それぞれの運動方程式を記せ．但し万有引力定数は G とする．(2)二つの質点の重心 $\vec{r_c}$ の定義を記せ．(3)重心が等速直線運動をすることを示せ．(4) $M\gg m$ のとき運動方程式が $\ddot{\vec{r}}=-\dfrac{GM}{r^3}\vec{r}$ で近似できることを示せ：$\vec{r}$ の大きさを r とする．(5) $\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}$ (面積速度[2])として，$\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}$ が時間変化しないことを導け．(6)問題(4)の運動方程式と $\dot{\vec{r}}(=\vec{v})$ の内積を計算すると，エネルギー保存則が得られること，即ち $\frac{1}{2}v^2-\frac{GM}{r}$ が時間変化しないことを示せ．

[2] 単位質量あたりの軌道角運動量ともいう．