

「宇宙測地学」 期末試験問題(2023.2.3)

1. 万有引力ポテンシャル V が満たす方程式 $(a) \nabla^2 V = 0$ の解を球座標 (r, θ, λ) で求める：但し r, θ, λ は動径距離, 余緯度, 経度である. $V=R(r) \Theta(\theta) A(\lambda)$ と変数分離すると, 式(a)

$$\text{は次のように書き換えられる: } \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{A \sin^2 \theta} \frac{d^2 A}{d\lambda^2} = 0. \text{ 以下}$$

の問いに答えよ. (1) 下線部(a)の方程式の名称を答えよ. (2) 上式の第一項は r のみに依存し, 第二項と第三項は θ と λ のみに依存する. それらの和が 0 なので第一項を定数 K とすると第二項と第三項の和は $-K$ となる. $K=l(l+1)$ とするとき r^l と $1/r^{l+1}$ の二つが $R(r)$ の微分方程式の解となることを示せ. (3) $R(r)$ の一般解は二つの定数 A と B を用いて $R(r)=Ar^l+B/r^{l+1}$ となるが, 天体の重力ポテンシャルを表すためには定数 A, B はどうあるべきか, 理由とともに述べよ. (4) 第二項と第三項の和 $-K$ に $\sin^2 \theta$ を

$$\text{掛けると } \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + K \sin^2 \theta = -\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \lambda^2} \text{ となり, 左辺と右辺で変数が再び分離され}$$

る. $-\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \lambda^2} = m^2$ (定数) としたときの $A(\lambda)$ の一般解を記せ.

2. 国土地理院の地図において, (1) 三角点, (2) 水準点はどのような記号で記されているかそれぞれ記せ. (3) 国土地理院の GNSS 観測網は GEONET と呼ばれ, 約 1300 点の受信局があるが, 各受信局は地図の上では (国土地理院では) 何と称されるか答えよ.

3. 地球(半径 R_e) を周回する人工衛星の運動は, 軌道要素を用いて記述される. 現実の地球を周回する人工衛星への最も大きな摂動は $J_2 (= -C_{20} = +1.08 \times 10^{-3})$ の効果で, これを考慮すると軌道要素の時間変化は右の 6 つの式に従う. 但し n は「平均運動」(平均公転角速度), R_e は地球半径で定数である. 以下の問いに答えよ. (1) J_2 の効果が無い場合はケプラーの法則が成り立つ. 第一法則は衛星が楕円軌道にあることを述べ, 右式の軌道要素を用いて $\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e \cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}$ のように表現される. ここで r は楕円のどこから
- $$\frac{da}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0,$$
- $$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^2a^2}(1-5\cos^2 i),$$
- $$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3nJ_2R_e^2}{2(1-e^2)^2a^2}\cos i,$$
- $$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3nJ_2R_e^2}{4(1-e^2)^{1.5}a^2}(3\cos^2 i - 1).$$

の距離か答えよ. (2) (1) の式で $\theta = \omega$ のときに $1/r$ が最大になることから, ω を何と呼ぶか答えよ. (3) n はケプラーの第三法則 $n^2 a^3 = GM$ から求まるが, この指数 x と y の数値を答えよ. 但し G は万有引力定数, M は地球の全質量である. (4) $C_{20} (= -J_2)$ は $l=2, m=0$ のストークス係数で, 地球中心からの距離 r と緯度 ϕ を用いて次式のように定義される:

$$C_{20} = \frac{1}{2MR^2} \iiint r^2 (3\sin^2 \phi - 1) dM.$$

但し R は地球の平均半径である．これを以下の 3 つの慣性モーメント A, B および C

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dM, \quad B = \iiint (z^2 + x^2) dM, \quad C = \iiint (x^2 + y^2) dM$$

を用いて表せ．但し A, B および C はそれぞれ x, y, z 軸の周りの慣性モーメントである．(5) $d\Omega/dt = 0.9863^\circ/\text{day}$ にすれば Ω は一年かけて 360° 回る． $d\Omega/dt > 0$ であることから軌道傾斜角 i にどのような条件が付くことになるか説明せよ．(6) 前問(5)のような $d\Omega/dt = 0.9863^\circ/\text{day}$ を満たすような軌道を太陽同期軌道と呼び，多くの地球観測衛星で採用されている．この軌道の特長を 2 点，それぞれ 30 字程度で説明せよ．

4. 単一衛星の軌道要素の変化から万有引力ポテンシャルの低次のストークス係数が推定されてきたが，高次のストークス係数 C_{lm}, S_{lm} は双子の人工衛星 GRACE によって得られるようになった．さらに GRACE や後継の GRACE-FO では C_{lm}, S_{lm} が毎月のデータとして公開され，水循環変化などの質量分布変化を重力時間変化から観測している．(1) 双子衛星で重力場の空間分布を求める原理を，何を測定しているかに言及して，50 字程度で説明せよ．(2) 地球の GRACE と同じ測定原理を月に適用したのが GRAIL 衛星である．GRAIL は一年程度の観測期間で終了し，重力の時間変化は観測していないが，GRACE 衛星が高度 500km 程度であるのに対し，最初から高度 25km 程度(近月点)で最終的に 5km 程度まで高度を下げた．その結果として GRAIL の重力地図が GRACE のそれと比べてどのような特徴を持つことになったかを簡潔に述べよ．(3) GRAIL を低高度にすることが出来た要因は何故か，簡潔に答えよ．
5. GNSS の代表例である GPS 衛星に関する以下の文を読み，問いに答えよ．

『GPS 衛星群は，(あ)軌道傾斜角 55° の 6 枚の軌道面それぞれに数台ずつ置かれ，全体で現在約 30 機からなる．通常の地球観測衛星と異なり，GPS 衛星には(い)原子時計が搭載され，全 30 機が全て名目上は(う)UTC に同期している．GPS 衛星からの送信電波はカーナビやスマホにも内蔵されている受信機で受け取られるが，受信機で分かるのは各衛星の軌道情報データ等と(え)各衛星からの送信時刻と受信時刻の時間差である．それらのデータに基づいて受信機側で地上座標値を計算し，(お)緯度・経度・高さを求めているのであって，衛星が受信機の緯度経度高さを直接通知してくれるわけではない．GPS 衛星が送信する軌道情報データは，ある周波数の搬送波の変調によって地上に向けて送られている．全 30 機の GPS 衛星が同じ搬送波周波数を使っているにもかかわらず，「混信」せずに各衛星を区別できるのは，搬送波に軌道情報データを載せる前に(か)PRN で各衛星に固有の位相変調が施されており，その復調によって各衛星を識別し，前述の下線部(え)を得るためである．』(1) 下線部(あ)を踏まえて北極点での GPS 衛星の見え方を仰角と方位角の語を用いて簡潔に説明せよ．

(2) 下線部(い)の元素名を二つ答えよ．(3) 下線部(う)を日本語で述べよ．(4) 下線部(え)に光速をかけて得られる距離のことを何と呼ぶか．(5) 下線部(お)は右式の左辺の (x, y, z) から右辺の φ, λ, h を求めることを示すが， N は球の半径とどう違うかを a, b ， φ を用いて説明せよ．(6) φ と h の最初の近似値を求める手順を式を用いて説明せよ．

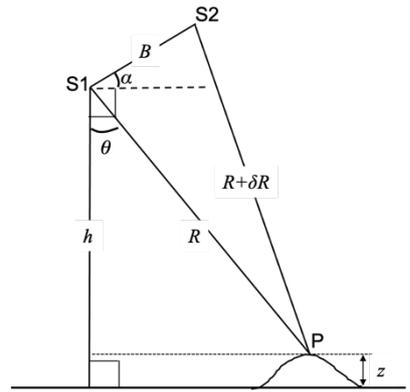
$$\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z = ((b^2/a^2)N+h)\sin\varphi \end{cases}$$

(7)スマホやカーナビ等でしばしば緯度・経度は表示されるが高さに関するデータが表示されないのは何故か、20字程度で述べよ。(8)下線部(か)は Pseudo Random Noise の略である。GNSS 以外にも「ランダム信号の相関処理」を用いる宇宙測地技術がある。その技術の略称とそのランダム信号の起源を簡潔に説明せよ。

6. GNSS の「相対測位 (干渉測位)」では受信機と各衛星までの距離を (あ) 波の位相で測定する。(あ) 波の波長を λ , 衛星 1 と受信機 A 間の幾何学的距離を ρ_A^1 とすると、この距離に相当する位相角 Φ_A^1 (radian) は (い) である。しかし、実際に時刻 t に受信機 1 で受信する衛星 A からの位相角 Φ_A^1 は $[0, 2\pi]$ (或いは $[-\pi, +\pi]$) に丸めこまれているため、 Φ_A^1 は衛星受信機間の距離 ρ_A^1 に相当する位相角 (い) に、 2π の整数倍 $2\pi N_A^1$ を加えた量になる (ただし N_A^1 は未知)。また、衛星 1 および受信機 A の時計は全世界共通の時計と完全に (う) しているわけでもないため、それぞれの (う) 誤差 δt^1 と δt_A も新たな未知量として加わる。「相対測位 (干渉測位)」では、二週間程度後に公表される (え) 暦を用いて、より精度の高いデータを得る。以下の問いに答えよ。(1)空欄 (あ) ~ (え) に当てはまる適切な語句、数値または式を記せ。(2)観測される位相データ Φ_A^1 は対流圏や電離層による誤差要因は無視すると、 $\Phi_A^1(t) = (\text{い}) + 2\pi N_A^1 + 2\pi f(\delta t^1 - \delta t_A)$ と表せる：ここで f は GNSS の送信電波の周波数である。ここで δt^1 と δt_A を消去する「二重差をとる」操作について、別の受信機 B で得る衛星 2 からのデータを Φ_2^B などと表現して説明せよ。

7. マイクロ波を用いた宇宙測地技術では、非真空媒質中での位相速度 v_p が真空中の光速 c と異なることも考慮しなければならない。屈折率 $n \equiv c/v_p$ が 1 ではないため、電波送信源と受信源の直線距離 L は、真空ならば $L = f ds$ となるが (ds は線要素)、現実の電離圏/対流圏を伝搬することで、 $\Delta L = f(n-1) ds$ だけ見かけの経路長が変化する。一方、屈折現象は一般に外部から入射した(1)角振動数 $\omega (=2\pi f)$ の電磁波が媒質中の電子を振動させることに伴って二次的に放射される電磁波としてモデル化され、屈折率 n は右式で与えられる。ここで媒質に依存するのは、 N_e (媒質中の電子の数密度($1/m^3$)) と ω_0 (媒質中に束縛される電子の共鳴角振動数) である。電子電荷 q_e , 電子質量 m_e , 真空の誘電率 $\epsilon_0 (>0)$ は定数である。以下の問いに答えよ。(i)共鳴角振動数 ω_0 の媒質に電子があるとして、下線部(1)の電子の運動方程式を記せ。ただし電子の運動は x 方向一次元とし、電磁波の電場は $E = E_0 \exp(i\omega t)$ とせよ。(ii)電離層では太陽からの紫外線や X 線で空気分子が電離していて、電子は「自由」に動き回る。その結果、電離層中の位相速度 v_p は光速 c を上回ることを上式から説明せよ。(iii)電離層伝搬に伴う見かけの距離変化 ΔL を異なる二周波 f_1 と f_2 で測定することによって、経路に沿った全電子数が推定できることを示せ：つまり ΔL は補正可能。(iv)前問の「経路に沿った全電子数」の単位を答えよ。(v)マイクロ波に対する対流圏の屈折率 n も 1 と異なるため ΔL は無視できないが、電離層補正のような二周波観測は有効ではない。これは何故か、上式を踏まえて簡潔に説明せよ。
- $$n = 1 + \frac{N_e q_e^2}{2\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

8. 干渉合成開口レーダー(Interferometric SAR/InSAR)で現れる干渉縞はヤングの干渉縞の原理と同じで、ヤングの実験の二つのスリットが二つの衛星軌道(右図の S1 と S2)に対応している。以下では S1 と S2 の撮像時期が異なる Repeat-pass 型の InSAR を考える。一枚の SAR 画像の各ピクセル値は^(a)複素数で、振幅と位相で表現できる。



InSAR の基本的観測量は二つの衛星軌道で得られる^(b)位相データの差 ψ である。S1 と S2 の画像取得時の^(c)ピクセル内の散乱特性が同じならば、図中の点 P の位相(差) ψ

は右図の衛星視線距離変化 δR とマイクロ波の波長 λ を用いて、^(d) $\psi = -4\pi\delta R/\lambda$ と表せる。以下の問いに答えよ。(i)下線部(a)の複素数 $z=x+iy$ の振幅(a とする)と位相(ϕ とする)のそれぞれを x と y で表現せよ。(ii)下線部(b)の位相差を 2 回の SAR データ z_1 と z_2 から求めるための演算を z_1 と z_2 と用いて記せ。(iii)下線部(c)の条件が成り立たない場合の具体例を一つ簡潔に述べよ。(iv)下線部(d)の ψ の式が、図中の基線長 B 、

オフナディア角 θ 、S1 から S2 を見上げる仰角 α を用いて $\psi = \frac{4\pi}{\lambda} B \sin(\theta - \alpha)$ となる

ことを示せ。ただし余弦定理を用いて、 R は B 、 δR に比べて十分大きいとせよ。(v)実際に取得される干渉画像の位相 ψ が空間的にどのように変化するかを調べるために、オフナディア角 θ が僅かに $\Delta\theta$ だけ変化したときの ψ の変化 $\Delta\psi$ を記せ。(vi) $\Delta\theta$ は、視線距離 R の変化 ΔR と点 P の高さの変化 Δz で生じる。図から $z = h - R \cos \theta$ であることから、 Δz を ΔR と $\Delta\theta$ で表現せよ。(vii)前二問の結果から $\Delta\psi$ を ΔR と Δz で表現し、「軌道縞」(Flat earth fringe)と「地形縞」(topographic fringe)に分かれることを示せ。(viii) 前述の軌道縞と地形縞は衛星軌道や地形図を用いて補正できるため、Repeat-pass の間に何らかの地表変位が起きた場合に(大気遅延効果が無視できれば)「地表変位画像」が得られる。実際には地表の三次元変位ベクトル \mathbf{U} を衛星視線方向に投影した量が観測される。地表から衛星視線方向への単位ベクトルを \mathbf{n} としたとき、位相 ψ への効果を \mathbf{U} と \mathbf{n} で表せ。

9. SAR 画像が 5 回行われたとすると、最大で ${}^5C_2=10$ 通りの InSAR 画像を作成可能だが、実際には図のように 6 通りの InSAR 画像 d_i が作成できたとする。軌道縞と地形縞の補正は済んでいるため、例えば $d_1 \sim v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + v_3 \Delta t_3$ と書けるが、実際には大気遅延によるノイズも含まれている。(1) d_i を 6×1 のベクトル \mathbf{d} の要素、 v_j を 4×1 のベクトル \mathbf{m} の要素として、 $\mathbf{d} \sim \mathbf{Gm}$ としたときの行列 \mathbf{G} の要素を具体的に全て記せ。(2) ベクトル \mathbf{m} の最小二乗法解を \mathbf{d} と \mathbf{G} を用いて記せ。

