「宇宙測地学」中間試験問題(2022.12.2)

1. 地球形状の表現に関する以下の問に答えよ．ただし地球の中心を原点として赤道面内に x 軸と y 軸があり，z 軸はそれに直交するとする．(1)球上の点を(x,y,z)とする半径 a の球の式を記せ．(2)実際の地球は赤道方向に膨らみを持ち，極半径を b, 赤道半径を a とする回転楕円体(楕円体とも呼ぶ)として扱う．この回転楕円体の式を x, y, z, a, b を用いて表せ. (3)前問の a と b を用いて扁平率 f の定義を記せ.
2. 現実の地表の点を(x,y,z)で表現するためには前問の回転楕円体上の点ではなく，緯度 φ，経度 λ，(1)緯度に依存する半径 N に加えて右式のような h も必要になる．以下の問いに答えよ．(1)Nを何と呼ぶか. (2)大問 1 の(2)を利用して，N を a, b, φ を用いて表せ．導出過程も記すこと．(3) h を何と呼ぶか．(4)日本に限らず多くの国では現在も「高さ」といえば h ではなく，別の量が用いられている．その名称を答えよ．

$$\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z = ((b^2/a^2)N+h)\sin\varphi \end{cases}$$

(5)宇宙測地技術の時代には h が先に決まり，ここから前問(4)の高さを求める．そのために必要な手順を説明せよ．(6)宇宙測地技術の登場以前は，緯度 φ，経度 λ ともに天文観測から求められていたが，現在では上式の左辺の(x,y,z)が先に求まり，そこから緯度 φ，経度 λ を求めている．経度 λ を求める手順を述べよ．(6)緯度 φ を求めるのは単純ではないが，最初の近似値を得るために必要な式を x,y,z 及び楕円体に関する a, b を用いて表せ.

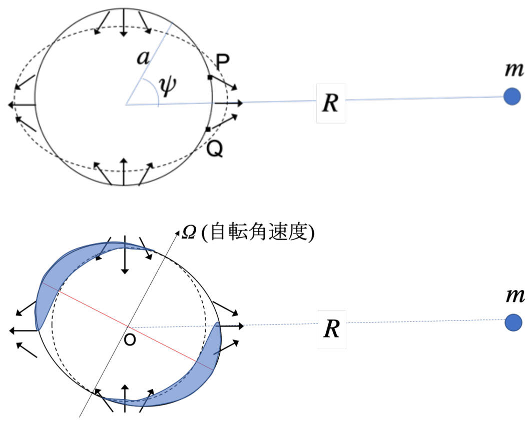
3. 有限の大きさ（平均半径 R）と質量 M を持つ天体の(外部での)万有引力ポテンシャル V は球座標系（動径 r，余緯度 θ，経度 λ）で次式のように表現される．以下の問いに答えよ．ただし G は万有引力定数である．

$$V = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta)$$

(1) C_n^m, S_n^mを何と呼ぶか．(2) n=0, m=0 の項を示し，大きさの効果が考慮されないことを説明せよ．(3)文献によっては n=1 の項が省かれることがあるのは何故か，説明せよ．(4)上式によって，ルジャンドル陪関数 $P_n^m(\cos\theta)$の n, m の組み合わせで，あらゆる空間パターンを表現する．m=0 は（n によらず）どのような空間パターンを表現するか, 簡潔に答えよ. (5)地球の万有引力が月にもたらす力を考えるとき，n=3 以上の項は考慮されないことが多いのは何故か, 上式(の一部)を用いて説明せよ.

4. 月や太陽からの起潮力に対する地球上の潮位変化について考える. 潮汐の時間スケールは，半日周，日周，二週間といった①長周期であるため，地球や海水の潮汐応答を調べるときには，（地球や海水の）運動方程式において（ア）項を無視した「（イ）変形」の近似を用いる．潮汐ポテンシャルを U，固体地球は剛体でその表面の海水が完全流体とすると，潮位変化は潮汐ポテンシャル U と重力加速度 g を用いて（ウ）と表せる．固体地球を弾性体とした場合は，地表面の②動径方向への u_r の変位とともに③地球内部での質量分布にも変化が生ずる．弾性地球の（イ）変形の効果を U

に対する応答として定量化するためには④無次元の数 h,k,l を用いる．以下の問いに答えよ．(1)下線部①の長周期とは潮汐の時間スケールが，何の時間スケールに対して長いことを述べているか答えよ．(2)空欄ア，イ，ウにあてはまる語句や式を記せ．(3)下線部②の u_r を下線部④のいずれかと U と g を用いて記せ．(4)下線部③による潮汐ポテンシャルの変化分 ΔU を下線部④のいずれかと U を用いて記せ．(5)問(3)と問(4)に基づいて，験潮場(検潮所)で観測される潮位変化を U, g と下線部④の無次元数(のいずれか)を用いて表せ．(7)下線部④の l を特に何と呼ぶか．(8)下図の上段の状況では潮汐ポテンシャルは $U=-\frac{Gma^2}{2R^3}\left(3\cos^2\psi-1\right)$ で点線のように分布する．ψ が 0 から 2π と変化するときに U がどう変化するかを図示せよ：$3\cos^2\psi-1=(\cos 2\psi+1)/2$ を利用し，横軸 ψ，縦軸 U として図に示せ．(9) 潮汐力は U を空間微分して上段図の矢印のように分布することが分かる．このとき点 P と点 Q で潮汐力 $\vec{f}$ が球状地球にもたらすモーメント $(\vec{r}\times\vec{f})$ の向きをそれぞれ答えよ．(10) (9)の潮汐力分布自体は地球と質量 m の位置関係で決まり，地球の自転/公転と無関係である．一方，実際の地球は赤道部が膨らんだ自転する楕円体で，質量 m が太陽だとすると潮汐力分布と地球の向き・形状が下段図のようになることがある．この状況で om に対して右下の水色部分が受ける潮汐力によるモーメントの向きを答えよ．(11) 質量 m が太陽であるとき，潮汐力モーメントは一年を通じて，どのように変化し，その結果どのような地球の運動を生み出すか説明せよ(80 字程度)．

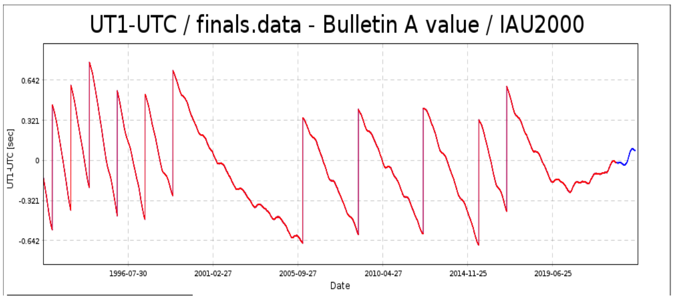


5. 大問 4 の潮汐力による運動以外に，流体地球と固体地球の角運動量のやりとりでも地球の回転変動は起きる．この回転変動は地球に張り付けた角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転する座標系で考え，観測される．ただし地球は剛体の回転楕円体とすると，慣性モーメントテンソル I は右式のように対角化され，角速度ベクトル $\vec{\omega}$，トルク(力のモーメント) $\vec{L}$ は右のように与えられる：流体地球の角運動量変化が $\vec{L}$ として固体地球の回転を変化させる．

$$I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},\vec{\omega}=\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},\vec{L}=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

この回転座標系での角運動量 $\vec{H}=I\vec{\omega}$ の保存則は $d\vec{H}/dt+\vec{\omega}\times\vec{H}=\vec{L}$ である．以下の問いに答えよ．(1)この角運動量保存則の式を三成分に分けて記せ．(2)角速度ベクトル $\vec{\omega}$ がほぼ z 軸方向を向き，回転運動の揺らぎは小さいことから，1 に比べて十分小さい量 m_i (i=1,2,3)を用いて $\vec{\omega}=\Omega(m_1, m_2, 1+m_3)^t$ と表す：t は転置を示す．ここで m_3 は一日の長さ変化分(ΔLOD)と関連する．一定の一日の長さを LOD_0，変動分を ΔLOD として，m_3 との関係を導け．(3)問(1)の三成分のうち m_1, m_2 の一次項まで残すと固有振動が得られる．その固有振動数の表現を導け．

6. かつては地球の自転自体が規則的な時計と考えられ, 1956年まで1秒は24時間(=3600秒×24=86400 秒)を 86400 で割った量として定義されていた．そもそも 24 時間とはどう決まるのか．現実の太陽に基づいた時刻系は「（ア）太陽時」と呼ばれるが，黄道傾斜と楕円軌道のため一年間で太陽の（イ）時刻は昼 12 時から±（ウ）分ほど規則的に外れてしまい，これを（エ）という．そこで赤道上空に沿って円運動する仮想的な“平均太陽”を考え，24 時間は平均太陽の（イ）から（イ）までの時間とした．しかし“平均太陽”は実在しないため実際には（オ）の子午線通過時刻が測定された：ここで時計が必要になる.（オ）の観測に基づく時刻系なので「(オ）時」といい，「(オ）日」とは約（カ）時間（キ）分のことである．一方，天体の位置は（ク）と（ケ）で指定されるが，（ク）は「度」ではなく地球の自転があるので「時,分,秒」で指定する. 英国グリニッジで“平均太陽”が（イ）する（オ）時を Universal Time 0(UT0)と呼んだ. 但し UT0 はグリニッジ（オ）時が平均太陽の（イ）と一致する時刻に（コ）を加えた時刻で定義される．UT0 から（サ）の効果を補正した量 UT1 は現代では直接測定されている．UT1 の測定とは独立に 1930-40 年代には（シ）時計が発達して，一日の長さが長くなっていることが発見された．現在の 1 秒の定義は（ス）原子の特定の放射周期を利用した半永久的に不変な量になっているが，この 1 秒の定義に問題があるため UT1 そのものを時刻系にすると（イ）時刻が少しずつズレてくる．そこで下図のように数年に一度（セ）が導入されてきた．ところが最近(1)今まで経験したことのない自転角速度変動が起きていることも示している．(1)空欄(ア～セ)に適切な語句や数値を答えよ．(2)下線部(1)の自転角速度の現状について図から分かることを述べよ(30-50 字程度)．(3)(2)の結果，全球の大気海洋を含む「流体地球」の角運動量がどうなっているか，簡潔に述べよ.



7. 質量 M と m の二つの質点を考え，それぞれの位置ベクトルを$\vec{r_1}$と$\vec{r_2}$とし，M から m へ向かうベクトルを$\vec{r} \equiv \vec{r_2} - \vec{r_1}$とする．(1)$M$ と m それぞれの加速度を$\ddot{\vec{r_1}}$と$\ddot{\vec{r_2}}$として，それぞれの運動方程式を記せ．万有引力定数は G とする．(2)二つの質点の重心$\vec{r_c}$の定義を記せ．(3)$M \gg m$ のとき M から m へ向かうベクトル$\vec{r}$に関する方程式が$\ddot{\vec{r}} = -GM\vec{r}/r^3$と近似でき（$r$ は$\vec{r}$の大きさ），ここから$\vec{h} \equiv \vec{r} \times \vec{v}$が時間変化しないことを導ける．これはケプラーの第 2 法則に対応すると同時に，M の周りの m の運動が平面内に留まることも意味する．そこで M を原点として m の運動を xy 平面内の極座標で記述する．m の位置座標を$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$としたとき，それぞれの時間に関する一回微分$\dot{x}, \dot{y}$を r，θ及びそれらの時間微分を用いて記せ．(4)加速度の二成分$\ddot{x}, \ddot{y}$を r とθ及びそれらの時間微分を用いて記せ.