力学

石川健三

平成 23 年 7 月 28 日

序

本書は、理系の大学１年生のための力学の教科書である。

力学は、物理学の中で最も基本的な分野であり、物体の運動についての法則や原理の体系からなっている。運動法則に基づいて物体の運動を理解する力学の基本的な考え方は、運動以外のより広い現象に適用され、他の物理学の諸分野が発展した。そのため、物理学のコースの中で、力学は初めに置かれている。力学を理解し、また使いこなせるようになることが物理学を習得するうえで大切である。

物体の位置が時間的に変化するのが運動である。動的な現象である運動が、いくつかの運動法則に基づいて理解できる。個々の複雑な現象を、いくつかの法則で理解する考えや方法は、いわゆる科学的方法の中心をなすものであり、力学で初めに確立した。ニュートンは、著書プリンキピアで運動の三法則を中心に、物体の位置の時間的な変動が、力と質量を使うことにより、普遍的な法則に基づくものであることを明らかにした。このようにして、力学の集大成が行われ、多岐にわたる自然現象がいくつかの自然法則で理解できることが明らかになった。自然法則は、物体、時や場所を問わず成立する普遍性を持つ。逆に、諸々の複雑な現象が、普遍的な法則で理解できる。

物体の運動を普遍的に表わすためには、力と質量を使う事が必須であり、力と質量により、運動の普遍的な法則が、明らかになった。力や、質量の意味や定義は、ニュートンの運動法則によってなされる。運動の三法則は、力や質量の意味を明確にすると共に、運動が力や質量の考えを駆使して理解できる事を示す。運動法則の一つの運動方程式より、時間に関する位置の２階微分である加速度が力と質量から決定される。ニュートンは、微分の考えを初めに創始した者でもある。

力学の諸問題は、微分、積分や微分方程式の応用の場としても最適である。本書は、力学と数学を同時に学ぶよう構成されている。これらの数学を学んだ学生が、その練習を力学でおこない、逆に力学で学んだ法則を数学的に深めることを念頭に置いている。そのため、関連するベクトル、微分、積分、ベクトル解析、微分方程式等についても丁寧に説明した。これらの事柄を一歩一歩理解することより、全体の理解ができてくる。また内容を理解するだけではなく、使いこなせるようになる事が重要である。このためには、問題を解くことが役に立つはずである。この際、関連する数学についても、具体的な問題を解くことによって理解が深まる。その結果、力学の理解もさらに深化するであろう。

目 次

第1章　物理学とは

　自然科学は、自然の現象を普遍的な概念や法則に基づき理解する学問である。自然現象には、互いに似た現象から全く異なる現象まで広い範囲にわたる多くのものがある。このため、便宜上、対象に応じて自然科学を、物理学、化学、生物学、地球科学、等に分け、さらに自然科学と密接に関連する数学に分類している。もちろん、各分野の中間や、複数分野に分類される自然現象もたくさん存在する。

　物理学は、自然現象の中で最も基本的な物質、空間、時間等の諸々にかんする事柄を扱う科学である。そのため、物理学の法則は、他の法則から導きだすことが難しい基本的な法則であることが多い。逆に、基本的な法則から導けることは沢山ある。だから物理学は、他の自然科学の基礎となっていることも多い。

　物理学は、自然界における諸々の物体やその運動並びに変化が従う規則、自然の構造や変化、ならびにその機構についての普遍的な理（ ことわり）から成立している。普遍的であるとは、時、場所、もの、等に関係なくいつも成立することを意味する。

　人類は、古代には物理学を知らなかった。しかし、生活の糧として食糧を得ることが最も重要であるとき、物理学の考えを次第に使ったに違いない。例えば、矢や石で獲物を捉えるにはどうすべきか？ これを知るためには、矢や石が空気中でどのような軌跡をとって運動するか知る必要がある。これらについて、経験的に次第に知識を深めたであろう。

　また、物を熱することより食糧が食べやすくなり、また熱があれば暖房にも使える。このために、火や熱が重要であった。火や熱はのちになって、動力とも結びつく。これ等の、生活と密着した事柄を通して、多くの自然現象を理解すると共に、一方で言葉を発明した。言葉を通して相互の理解を可能にして、相互で知識を交換しまた知識を共有した。さらに言語を通して、徐々に高度の抽象的な思考を行なうようになった。抽象的な思考により、概念を通した自然の理解が可能である。このようにして人類は、日々の生活における目に見えるもの、触るもの、聞こえるもの等を礎にして、諸々の現象の探求を行なうようになった。そして徐々に、[一見複雑に見える多様な現象は、単純ないくつかの自然法則の基に起きている] 事を見つけてきた。長い歴史的な発展を通して、物理学は体系化され現在の姿になった。
身近に見られる物体（ 石 ）の放物運動や、振り子の運動、天体（ 惑星）の運動を理解することで、まず力学の体系が徐々に形成された。これは、ガリレオ、ケプラー、ニュートンをはじめとする多くの科学者の成果である。

1.1　物理的考え方

物理的な考え方の一つの特徴は、様々な物体の性質や物体が示す諸現象を、単純な原理や法則で把握することにある。個々の現象や問題を、別個の事柄として考察するのではなく、これらを総合的にまとめて理解する。このさい、これらの原理や法則が、各現象にどのように関連しているかを、明らかにする。この法則がわかれば、自然を統一的に理解でき、また、普遍的な法則を中心に据えて自然を理解できるようになる。この結果、時には新たな未知の事柄を予言し、また新たな現象の発現に適切に対処できる。

では自然を、明解な論理に基づいて統一的に把握するのには、どうしたら良いだろうか？

その答えは、物理学の考え方を最初に確立した力学に見つけられる。力学が、運動に関する多様で異なる多くの自然現象を統一的に把握した最初の例となっている。運動法則は、物体の運動が力によって引き起こされ、物体は、加わった力に比例し、物体に固有の質量に反比例する加速度を持つことを表わす。力、質量、と加速度を使い物体の運動を理解する力学に、物理学の典型的な考え方が、見える。

物理学は、力学における力や質量のように様々な抽象的な概念を駆使する。新たな物理的概念を使うことにより物理現象を考察でき、その結果これらの**概念、物理量**により**物理法則**が表わされる。さらにこの物理法則で、多くの現象が普遍的に理解できる。だから、物理法則は、これら物理量や物理概念、並びにそれらの満たす関係式から構成されている。

物理概念、物理量

物理概念の例としては、物体の位置、時間、長さ、面積、体積、速度、加速度、ー等から、
高度な意味を持つ、質量、力、仕事、エネルギー、運動量、角運動量、等、ー
また、さらに抽象的な意味を深めた、温度、電荷、電流、電場、磁場、ーーー
等の様々がある。これらのうち、長さ、面積等が何を意味するのかを知ることは、難しくない。また、長さ、面積等は普遍的な意味、つまりいつも同じ意味をもっている。これらは、どこでも同じ意味で使われ、再現性があり、誰にとっても同じである。また、多くの異なる物体が、長さや面積がいくつであるか、で同じものさしで定量化され、異なる物体が、共通な概念で統一的に理解出来る。すべての物理概念は、このように、普遍的な意味を持つ。高度な物理概念が意味する内容は、長さや面積ほど簡単ではないが、やはり普遍的である。
また、これらの概念は、多くの場合、すべての物体や現象に適用できる普遍的な関係式である自然法則を満たしている。この関係式が、自然法則であり、また概念の定義式を兼ねることも多い。

自然法則によく数学が使われる。数学は、抽象化された物理量の関係を示すのに、最適である。しかしながら、数学を使い表わされる物理法則が、具体的な現象にいかに適用されるか、を理解することは易しくない。具体的な現象を、高度に抽象的な物理法則と結びつけると共に、物理法則に基づいて生ずる現象を予言できるまでなれば、物理の理解はほぼ十分といえる。

物理学の歴史を振り返ると、19 世紀末までに、**古典物理学（ 力学、電磁気学、熱学、統**

計力学等）が形成された。古典物理学のそれぞれの分野は、異なる対象や自然現象に対して適用される。本書で扱う力学は、最も基本的でありまた論旨が明解である。物体の運動を解明した力学は、物理的な考えや物理的な方法を発展させた最初の分野である。力学で発展した物理的な考えが、その後他に波及して、電磁気学を初めとする多くの分野が形成された。これらの学問は、多くの先人達の努力により発展した。彼らの成果が、美しく堅ろうでゆるぎない建築物のように完成されている。物理学を代表として、諸々の自然科学やまた人文科学は、芸術等と並び人類が長い間に形成した文化や文明の根幹をなしているといえるであろう。
ところで、古典物理学の完成を経た１９世紀末には、すべての物理現象が理解できたと思われた。しかしその後、１９世紀末から２０世紀初めにかけて、原子や分子に代表されるミクロな世界の多くの新たな事実が発見された。そして、これらの現象が古典力学では理解できないことが判明した。その結果、新たな分野として、古典力学とは全く異なる量子力学の体系が作られた。ミクロな世界の物理は、現在では量子論で完全に理解出来ることが分かっている。さらに、時間とは何か、同時性とは何か、等の古典物理では考察の対象になっていなかった問題や、光の速さが等速度運動するどの座標でみても等しいという光速度不変の原理等の考察から、アインシュタインにより相対論が発見された。特に、光速に近い物体の運動は、古典力学とは全く異なることが分かった。

　量子論と相対論の二つの柱を中心にして、**現代物理学**が形成された。現代物理学は、新たな発見を見ながら現在も発展中である。ミクロな世界で成り立つ量子論は、古典力学とは大きく異なるが、物理学の特徴である普遍的な概念や論理を基礎にして物理現象を理解する考えは、古典物理学と同じである。

　量子論や相対論に代表される現代物理学の発展は、電気、エネルギー、また諸々の物質の理解を大きく進ませた。これらをとりいれた結果、人類の生活や、文化、文明、また様々な価値観は一世紀の間に全く様変わりした。自然の普遍的な事柄を解明する物理学は、物質や時空の理解はもとより、生物や宇宙等の従来の範囲を超えた多方面の分野にわたって、近年さらに発展している。研究は世界レベルで進められ、分野によっては、進展速度は極めて大きい。現在得られつつあるこれらの成果は、２１世紀の人達に大きな影響を及ぼすことは疑いない。これからの時代を担ってゆく若い人たちが、自然の基本的な事柄を理解しておくことは必須であると思われる。

1.2　物理量の次元と単位

1.2.1　次元

物理法則は、物理量の大きさの間の関係式として定式化される。物理量は、大きさは数で表わされ、また決まった次元をもつ。 この点で、単なる数とは異なる。力学での物理量は、

長さ、時間、質量を基本としてこれらの積や、整数乗の高次の積で表せる。これには、理由がある。

力学の物理量が長さ、時間、と質量の次元を持つのは、運動で成立する力学の基本法則がこれらで表されるからである。力学の運動法則は、長さ、時間、質量の組み合わせで表されている。例えば、法則は

$$A = BC, \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}F = DE, \tag{1.2}$$

のような形で表される。これらの等式の両辺は、同じ次元を持つ。A の次元は B と C で決まり、F の次元は D の次元と E の次元さらに時間で決まる。方程式や関係式で、このように、右辺が決まっていれば、左辺の次元は右辺の次元で決まる。新たな物理量の次元は、この物理量が従う式で決まる。だから、物理量の次元は、この物理量が従う関係式で決定される。

1.2.2 物理量の単位

次元をもつ物理量の大きさを表すのに、具体的な単位をきめておくと好都合である。現在、世界的に共通な単位としては、メートル、Ｋｇ、秒を使う MKS 単位系が、世界標準である。この単位系のことを、国際単位系 (SI) と呼んでいる。

1.2.3 国際単位系：SI

基本単位

力学の３つの基本的な物理量である、長さ、質量、時間にたいして、

長さ：メートル

質量：Kg

時間：秒

が使われる。

一度、長さ、質量、時間の単位を決まった方法で定義し世界標準としておけば、いつでもどこでも使える。かって、世界で様々な異なる基準や、定義が使われていたので、大変不便であった。この事情は、丁度、貨幣が国毎に異なるため、貿易や旅行が不便であるのと同じである。

かって、世界の国々で使われていた単位は、

長さ：尺、寸（ 日本)、フィート、インチ（ 米)、ヤード、(英)

質量：貫（ 日本)、ポンド、オンス（ 米)、

時間：刻、等多種多様であった。世界的な交流が深まると、世界で一つの単位を設定して同じものを使うのが、より便利であることはいうまでもない。

現在は、国際度量衡委員会で世界標準が決定される。物理過程の値に基礎をおく定義となっている。
長さの単位メートルは、
1メートル：一秒の299792458分の1の時間に光が真空中を伝わる距離
である。
質量の単位Kgは、
１Kg：国際キログラム原器の質量：国際キログラム原器：白金90％イリジウム10％からなる合金で直径、高さ３９mmの円柱。様々な物理過程に基ずく定義が考案されている。
である。
また、時間の単位、秒、は
1秒：セシウム１３３原子の基底状態の二つの超微細構造の遷移に対応する放射の周期の91億9263万1770倍に等しい
である。メートル法はフランスで使われていた。フランス革命との関連さえ持っている。

組み立て単位

長さ、質量、と時間の積からなる物理量の単位は、基本単位から組み立てて決まる。これらの物理量の単位を組み立て単位といい、物理量の定義や物理量が満たす自然法則を使って組み立てられる。例えば、
速さ：移動距離／移動時間＝m／s
加速度：速度の変化／変化の時間 $= m／s／s = m／s^2$
面積：長さx長さ $= m^2$
等が組み立て単位である。さらに、様々な物理量、例えば、力、仕事、エネルギー、等が決まった単位で表される。単位は、これらの物量量が従う、関係式やこれらの物理量の定義から、一意的に決まる。
これらの定義には、**運動の法則**が使われる。運動法則により、力学に関する物理量の次元や単位は決まる。

1.3　物理量の計算と次元解析

力学では物体の運動を調べる。つまり、物体の位置が時間とともにどのように変化するかを、おう。このため、位置を測る長さや時間の経過量を定量的に示す物理量が使われる。だから、長さと時間が、基本的な物理量である。では、力の大きさは、定量的にどのように表わされるだろうか？力が関与するのは、運動法則である。運動法則の一つの運動方程式には、それぞれの物体に固有の値を持つ質量が登場し、力によって生ずる加速度が質量に反比例する。逆に、力は質量と加速度の積となる物理量である。このように質量が大事な働きをし、力は長さ、時間、と質量で表わされる。そのため、質量が、長さや時間と同じに定量的な大きさを示す基本的な物理量となっている。運動方程式は、質量、長さと時間から定義される

加速度、と力の関係式である。他の物理量は、これらを組み合わせて構成される。この結果、力学における物理量は、必ず 長さ^a × 質量^b × 時間^c $= L^aM^bT^c$ なる次元をもつ。

では、物理量の間の足し算、引き算、掛け算、割り算の四則演算では、次元はどのように変化するだろうか？

足し算や引き算は、同じ次元をもつ物理量に対して定義できるが、異なる次元をもつ物理量の間では定義できない。たとえば、$1m$ の長さの棒の先に $1m$ の長さの棒をつけた棒の長さはいくつか？二つを加えて、全体で $2m$ となり

$$1\ m + 1\ m = 2\ m \tag{1.3}$$

と計算される。このように同じ次元を持つ量の足し算は行える。次に各辺の長さが $1m$ である正方形の面積は $1m^2$ である。では、$1m$ の長さの棒の先に $1m^2$ の面積の正方形を付け足してみよう。このような形の物体があった時、これに対して $1m$ の長さと $2m^2$ の面積を加えて

$$1m + 2m^2 \tag{1.4}$$

の大きさであるとは言えない。このような足し算は決まった意味をもてない。このように、足し算は同じ次元を持つ量で初めて行える。加法

$$l_1 + l_2 \tag{1.5}$$

が意味をもつためには、l_1 と l_2 は同じ次元をもたねばならない。

時々、一つの物理量の異なるべき乗の間の足し算

$$A + A^2 \tag{1.6}$$

が定義されることがある。これが、可能なのは、二つが同じ物量的な意味を持つ同じ次元を持つ場合に限られる。これは、それらが次元を持たない物理量（ 無次元量）の場合に限られる。そのため、複雑な関数、例えば

$$\exp A = (1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots) : A \text{は無次元} \tag{1.7}$$

が定義されるのは、A が無次元量である場合に限られる。或る量の異なる冪の和が定義できるためには、それは無次元でなければならない。勿論、足された結果の値は、同じ次元を持っている。

掛け算と割り算は、長さの積から面積が考えられたように、任意の物理量の二つから新たな物理量を定義するのに使われる。A の次元を [A] と表すとき、掛け算や割り算で、次元は

$$[A] = L^{a_1}M^{b_1}T^{c_1}, [B] = L^{a_2}M^{b_2}T^{c_2} \tag{1.8}$$
$$[AB] = L^{a_1+a_2}M^{b_1+b_2}T^{c_1+c_2} \tag{1.9}$$
$$\frac{A}{B} = L^{a_1-a_2}M^{b_1-b_2}T^{c_1-c_2} \tag{1.10}$$

となる。このように、掛け算や割り算では、次元は変化する。物理量の持つ次元に着目して、方程式や物理量を解析することを、次元解析という。次元解析は、式の正当性を確認するのに使われる事が多い。

1.4　物理学と数学

物理学の法則は、物理量の関係式として数式で記述されることが多く、力学は、その典型である。力学では、特に微分や積分、ならびに微分方程式を使い基本的な法則や方程式が表現される。一般化や抽象化を行う物理学は、特に数学が頻繁に使われる。力学で使う数学に熟知している場合、力学の理解や習得は比較的簡単である。しかしながら、多くの場合は、読者はこれらの数学を学ぶのと、力学を学ぶのとほぼ同時である。だから、ここでは、力学と力学で使う数学を、ほぼ同時に習得するとして話を進める。

物理法則が抽象的な数式で表わされる場合、数式には、一つの概念を伴う物理量や、時には自然界の普遍的な定数である物理定数が登場する。光の速さが、物理定数の一例である。光の速さは、速さの次元を持ち、いつも変わらず、どこでも同じ値である点で、極めて普遍的な性質をもつ。これらの物理量や物理定数は、前節で述べたように、きまった物理次元をもつ。これらの次元は、これらの物理量が従う基本方程式で決定される。だから、基本方程式は、きわめて重要な働きをする。基本方程式に則り、物理量が決まると共に、その変化に関する法則が決まる。

物理法則は、多くの場合、原因と結果の間の関係である因果関係を示すことが多い。物理量の意味や、その変化を理解することで、初めて自然現象が理解できることも多い。だから、基本法則を表す数学を使い、初めて自然を本当に理解できる。もしも、基本法則を使わずに自然を理解しようとすると、表面的で、場当たり的な理解しかできないであろう。使われる数学と、物理法則がこのように絡みあっているので、物理の理解にあたり数学に慣れ親しむことは、必須である。また、物理量のもつ意味を理解するうえでも、普遍的な関係式を含めて理解することが大事である。

1.5　問題

1.5.1　単位と次元

力、仕事、エネルギー、の次元は何か？

1.5.2　メートル、秒、Ｋｇ

メートル、秒、Ｋｇの単位はどのように定義されているか？

1.5.3 次元解析

第2章　運動

物体の位置が時刻とともに変化するとき、物体は運動している。物体の運動には、様々なものがある。例えば、空中に放り投げられた物体のする放物運動、自転車や自動車の運動、太陽の周りの地球や火星らの惑星の運動等がある。では、これらの運動には原因があるのだろうか？ また、これらの運動には、規則や決まり、また法則があるのだろうか？ このような問題を考えるには、先ず運動を正確に表現する方法が必要である。

物体の運動を表すには、物体の位置、速度、加速度、等を具体的かつ定量的に表現することが求められる。位置を時間の関数として表わせれば、位置の時間についての変化率である速度や、速度の時間についての変化率である加速度がわかる。

先ずはじめに、大きさが無視できる物体について考えよう。大きさが無視出来る物体は、点として扱える。これを、質点という。質点の位置を表すにはどのようにしたら良いのかまづ考えてみよう。質点の位置は、空間で基準となる点からの距離と方向の両方を決めて、一つが決まる。逆に言えば、ある場所の位置をきめるには、大きさと向きとの両方が必要である。このような量のことを、ベクトルという。つまり点の位置は、ベクトルで表される。

質点の位置がベクトルであることより、位置が変化する際の速度や加速度も同じ性質を持つベクトルである。ただし、一次元上を運動する点の場合には、その位置は一つの正か負の実数で決定される。符号が正か負かで、向きを表すことが可能である。このように、一次元では、取り扱いは比較的簡単に済む。

2.1　直線運動

最も簡単な運動は、質点の一直線上の運動である。ある直線上を質点が運動する時、位置座標が時間とともに変化する。

2.1.1　直線上の位置

一つの直線上で位置を表わすため、適当な座標系を設定する。この座標系は、１次元では原点の位置と向きで決まる。原点を決め、さらに正符号を右向にするか、左向きにするかどちらでも良いが、一つきめれば座標系が決まる。通常は、右向きを正符号に選ぶ。この時、

原点を 0 に、右に $1, 2, 3 \cdots$ と対応させた物差し位置を決める。物体の大きさが無視できるとき、物体の位置をこの座標であらわす。つまり、場所に実数を対応させる。座標を

$$x = x(t) \tag{2.1}$$

と時間の関数と表す。時刻 t における位置が、時間 t に依存する関数 $x(t)$ であるとする。

2.1.2　直線運動の変位と速度

時間のある関数 $x(t)$ で、物体の位置が与えられているとき、時間間隔 Δt の間に位置が Δx 変化したとき、平均速度の大きさは平均変化率

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

で表される。位置の平均変化率は、物体の平均速度を意味する。

速度が、一定の値であるときは、座標は t に比例して t の 1 次関数として変化し、上の平均変化率は、速度に一致する。しかし、$x(t)$ が t の 2 次関数や複雑な関数であるとき、平均変化率 $\bar{v}$ は、時刻 t から $t + \Delta t$ までの、間隔 Δt の間の平均の速度を表わす。$x(t)$ が t の複雑な関数であるとき、平均速度は時間間隔に大きく依存してしまうので、使いにくい。そこで、瞬間速度を定義すると便利である。瞬間速度は、時間間隔を無限に小さくした時の位置の変化率であり、位置の時間での微分

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.3}$$

である。速度は、横軸 t 縦軸 $x(t)$ のグラフにおいて t における接線の傾きをあらわす。

また、加速度は時間間隔を無限に小さくした時の速度の変化率であり、速度の微分

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \tag{2.4}$$

である。加速度は、位置を時間で 2 階微分したものである。

例：加速度が一定である等加速度運動

微分を使う例として、加速度が一定である場合を考察する。加速度が一定で

$$a = \text{一定} \tag{2.5}$$

であるとき、加速度が速度の微分であるので、速度は

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{一定} \to v = at + v_0 \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

と t の一次関数となる。次に位置は

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v = at + v_0 \to x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \tag{2.8}$$

と、t の二次関数となっている。

2.1.3 関数の微分

関数の微分をここで復習しておこう。よく知られた関数の微分の公式を覚えておくと、便利である。

例：関数の微分

べき乗関数

べき関数 t^n の微分は、

$$\frac{d}{dt}t = 1 \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}t^2 = 2t, \frac{d}{dt}t^3 = 3t^2 \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1} \tag{2.11}$$

である。これらを確かめるには、二項展開を使うのが速い。x についての二項展開

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots \tag{2.12}$$

より、

$$\frac{d}{dt}t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t) - (t)}{\Delta t} = 1 \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}t^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - (t)^2}{\Delta t} = 2t \tag{2.14}$$

$$\frac{d}{dt}t^3 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^3 - (t)^3}{\Delta t} = 3t^2 \tag{2.15}$$

$$\frac{d}{dt}t^n = nt^{n-1} \tag{2.16}$$

が得られる 。２項展開は、n が整数の場合に限られる。任意の複素数 z では、

$$\frac{d}{dt}t^z = zt^{z-1} \tag{2.17}$$

が成立している。

三角関数

三角関数の微分では加法定理、

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{2.18}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{2.19}$$

と、変数が小さいときの三角関数の振る舞い

$$\sin(\Delta\theta) = \Delta\theta + O((\Delta\theta)^2) \tag{2.20}$$

$$\cos(\Delta\theta) = 1 + O((\Delta\theta)^2) \tag{2.21}$$

を使う。上で、$O((\Delta\theta)^2)$ は、$\Delta\theta$ について、２次以上の高次のべき乗の項を意味する。これら、変数が小さい時の三角関数のふるまいを求めるには、円弧の長さと三角形の辺の長さの関係を使うのが便利である。これより、三角関数の微分は

$$\frac{d}{dt}\sin at = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin a(t+\Delta t) - \sin a(t)}{\Delta t} = a\cos at \tag{2.22}$$

$$\frac{d}{dt}\cos at = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos a(t+\Delta t) - \cos a(t)}{\Delta t} = -a\sin at \tag{2.23}$$

となる。

上で述べたとおり、三角関数の加法定理や微少角における上の公式 (2.21) を導くのに、幾何的考察が役立つ。

2.1.4　様々な運動

では、様々な運動における速度や加速度はどのようになるだろうか、具体的な計算で求めてみよう。

1 物体の位置が時間の２次関数となる

位置が、時間の 2 次関数となっている場合では、速度や加速度が簡単に計算され

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c \tag{2.24}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = at + b \tag{2.25}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = a \tag{2.26}$$

となる。つまり、速度は時間の一次関数となり、また加速度は定数となる。これは、等加速度運動である。

2 物体の位置が時間の三角関数となる

位置が、R と ω を定数として時間 t の三角関数として

$$x(t) = R\cos\omega t \tag{2.27}$$

と与えられたとき、速度や加速度は、

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -R\omega\sin\omega t \tag{2.28}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -R\omega^2\cos\omega t \tag{2.29}$$

となる。加速度も、時間の三角関数であるが、一方で位置に比例している。比例定数は負の値となっているので、正位置にいるときは負方向の加速度をもち、負位置にいるときは正方向の加速度をもつ。また、位置で時間を $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ずらしても変わらない。このため、運動は、T を周期とする周期運動である。

3 指数関数
位置が、時間の指数関数

$$x(t) = e^{at} \tag{2.30}$$

では、速度や加速度は

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = ae^{at} = ax(t) \tag{2.31}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = a^2e^{at} = a^2x(t) \tag{2.32}$$

となる。
指数関数の特徴は、微分がもとの関数に比例することである。だから、速度が位置に比例する。指数関数では、つまり変化率が、その値に比例する。この形の変化の仕方を示す現象が多い。

4　指数関数と一次関数の組み合わせ
指数関数と一次関数を組み合わせた時間の関数で位置が決まるとき、

$$x(t) = v_0(t - \frac{1}{a}e^{-at}) \tag{2.33}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v_0(1 - e^{-at}) \tag{2.34}$$

$$z(t) = \frac{d}{dt}v(t) = v_0ae^{-at} \tag{2.35}$$

となる。この場合の特徴は、$t \to \infty$ で、位置が時間に比例し、速度は一定の値になり、加速度が零となることである。

5　指数関数の逆関数である対数関数

対数関数では、

$$x(t) = x_0 \log(t) \tag{2.36}$$

$$t = e^{\frac{x(t)}{x_0}} \tag{2.37}$$

両辺を t で微分して、

$$1 = e^{\frac{x(t)}{x_0}} \frac{d}{dt} \frac{x(t)}{x_0} \tag{2.38}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = x_0 e^{\frac{-x(t)}{x_0}} = \frac{x_0}{t} \tag{2.39}$$

となる。この場合の特徴は、逆関数の関係式を使ったことである。

2.2　3次元運動

2.2.1　ベクトル

我々が住む空間は、三次元空間である。三次元空間での運動の記述には、三次元ベクトルが使われる。座標系としてデカルト座標 (x, y, z)、または $(x_i; i = 1, 3)$ と表記する、を使う場合、各時刻での位置ベクトルを指定するにはそれぞれの方向の 3 個の実数（成分）が必要である。

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))(= (x_1(t), x_2(t), x_3(t))) \tag{2.40}$$

同じように、速度ベクトルも 3 成分を持つ。

速度ベクトルは、位置ベクトルの時間微分であるので、各成分を微分して

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = (\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)) = (\frac{d}{dt}x_1(t), \frac{d}{dt}x_2(t), \frac{d}{dt}x_3(t)) \tag{2.41}$$

となる。さらに加速度ベクトルも同様に表せる。つまり、デカルト座標における位置、速度、加速度の各成分を

$$x_i(t), v_i(t), a_i(t), i = 1, 3 \tag{2.42}$$

とすれば、

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = v_i(t), \tag{2.43}$$
$$\frac{d}{dt}v_i(t) = a_i(t) \tag{2.44}$$

となる。デカルト座標におけるベクトルの微分を求めるには、各成分毎に微分すればよい。

速度ベクトルの時間微分（＝位置ベクトルの時間についての2階微分）が、加速度ベクトル

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = (\frac{d^2}{dt^2}x(t), \frac{d^2}{dt^2}y(t), \frac{d^2}{dt^2}z(t))(= (\frac{d^2}{dt^2}x_1(t), \frac{d^2}{dt^2}x_2(t), \frac{d^2}{dt^2}x_3(t))) \tag{2.45}$$

である。

2.2.2 位置ベクトル

例えば、時刻 t で位置ベクトルが

$$\vec{x}_1(t) = (2t, 3, 4.9t^2), \vec{x}_2(t) = (0, 3t, 4.9t^2 + 5t) \tag{2.46}$$

であるとき、速度ベクトルの成分は

$$\vec{v}_1(t) = (2, 0, 9.8t), \vec{v}_2(t) = (0, 3, 9.8t + 5) \tag{2.47}$$

となる。さらに加速度ベクトルの成分は

$$\vec{a}_1(t) = (0, 0, 9.8), \vec{a}_2(t) = (0, 0, 9.8) \tag{2.48}$$

となる。

2.3 等速円運動

身近なところで頻繁に起こる少し複雑な運動のひとつが、等速円運動である。

等速円運動は、半径 R の円の上で、質量 m の小さな物体が一様に回転する運動である。

面内で決まった軸から測った角度 θ は、時間 t と共に

$$\theta = \omega t \tag{2.49}$$

と一様に増加する。ここで、ω は、角度が変化する速度である角速度であり、今の場合一定である。

等速円運動は、物体の質量、円の半径、角速度の値と共に大きく変わる。

まず、速度や、加速度の方向や大きさを求める。

2.3.1 等速円運動の速度

小さな時間間隔 δt の間の位置ベクトルの変化量は、微小である。そのベクトルの差は

$$\vec{x}(t+\delta t) - \vec{x}(t) \tag{2.50}$$

である。δt が小さいとき、幾何学的に考えてわかるように、このベクトルは軌道の接線方向を向き、大きさは

$$v\delta t = R\omega\delta t \tag{2.51}$$

である。だから両辺を δt でわって、速度の大きさ、

$$v = R\omega \tag{2.52}$$

が得られる。

また、速度ベクトルは、接線方向を向き、円運動では動径方向といつも直交している。決まった軸から測った角度は、時間と共に一様に増加する。つまり、速度は、半径 $R\omega$ の円の上で回り、決まった軸からの角度 θ は、やはり時間 t に

$$\theta = \omega t \tag{2.53}$$

と比例して一様に増加する。この速度ベクトルの変化の仕方は、位置ベクトルの変化の仕方と同じである。速度ベクトルの変化の仕方で、位置ベクトルの変化の仕方と異なる点は、位置ベクトルから $\frac{\pi}{2}$ ずれた位置にいることである。

2.3.2 等速円運動の加速度

次に速度の変化率である加速度を調べる。等速円運動している速度の変化率が加速度であるので、加速度ベクトルは、速度ベクトルに垂直で角度が一様に増加する。つまり、位置ベクトルの絵で位置ベクトルと同じ直線上で逆向きである中心方向を向き、大きさは

$$a = R\omega^2 \tag{2.54}$$

である。方向は時間 t と共に

$$\theta = \omega t \tag{2.55}$$

と変化する。ベクトルの引き算を行い、上の結果が得られた。

例

（1）
等速円運動の例として、重りを紐でつなぎ回転させる。手で、紐をつなぎ止める場合、力の大きさを実感出来る。力の大きさは、半径や回転速度とともに大きくなる。
（2）
紐が切れたとき重りはどうなるだろうか？
紐が切れたとき、重りはその瞬間時の速度のままで、等速度運動を続ける。(慣性の法則)
速度は、接線方向であるが、力と加速度は中心方向である。
（3）
紐に如何なる力が必要か？
紐からの力（張力）が、円運動を引き起こす原因である。力の向きは、加速度の向き（中心方向）とおなじである。
紐をバネで置き換えて、力の大きさを測定しながら運動を調べる。バネでは、力の大きさと伸びが比例している。

2.3.3 等速円運動のパラメータ依存性

紐につながった重りの円運動の考察から、
（１） 紐からの力が切れたならば、重りは、切れたときの速度で、等速度運動を続ける。この速度は、接線方向を向いてい、大きさは半径と加速度の積に比例する。つまり速さは、半径 R に比例して角速度 ω に比例する。

2.4 重力中での自由落下運動

重力加速度は、一定である。そのため、自由落下する物体は加速度ベクトルが一定である等加速度運動をする。

2.4.1 自由落下

鉛直上方に座標軸をとり、位置を $x(t)$、重力加速度を g、初期位置を x_0、初速度を v_0 とすると、

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \tag{2.56}$$

となる。一階時間で微分して、速度が

$$\frac{d}{dt}x(t) = -gt + v_0 \tag{2.57}$$

となる。

いま、簡単のため、初期条件として

$$x_0 = v_0 = 0 \tag{2.58}$$

とする。重力加速度は $g = 9.8\ \mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$ であるので、落下する物体の１秒後、１０秒後、１００秒後の速度や位置の大きさは

$$t = 1\mathrm{sec}, v = 9.8\mathrm{m/sec}, x = 4.9\mathrm{m} \tag{2.59}$$

$$t = 10\mathrm{sec}, v = 98\mathrm{m/sec}, x = 490\mathrm{m} \tag{2.60}$$

$$t = 100\mathrm{sec}, v = 980\mathrm{m/sec}, x = 49000\mathrm{m} \tag{2.61}$$

と極めて大きな値となることがわかる。

速さを、時速に換算しよう。1 時間は、$3600(60 \times 60)$ 秒である。そのため、秒速を時速に換算するには、3600 倍する。その結果、速さは、

$$v = 9.8\mathrm{m/sec} = 9.8 \times 3600\mathrm{m/時間} = 36\mathrm{Km/時} \tag{2.62}$$

$$v = 98\mathrm{m/sec} = 360\mathrm{Km/時} \tag{2.63}$$

$$v = 980\mathrm{m/sec} = 3600\mathrm{Km/時} \tag{2.64}$$

となる。音速が、大体 340m/sec であることより、１０秒後の値がいかに大きいか想像できる。

実際の、落下運動ではこれほど大きな値にはならない。たとえば、雨粒の落下を想像してみよう。上の計算を使うと。490m から落下し始めた雨粒は、地上に届いたとき 360Km/時の速さになる。これは、新幹線より速いことになる。通常の電車は 100Km/時 くらいの速さであろうが、この電車にのって雨粒をみると、電車のほうが早いことがわかる。

2.4.2 雨粒の落下

実際の雨粒には、重力以外に空気からの摩擦の力が働き、加速度は一定ではない。摩擦の力は、抵抗として働き、運動方向とは、逆方向に働く。また、大きさは、速さに比例して

$$\vec{F}_{\text{抵抗}} = -b\vec{v} \tag{2.65}$$

と表わせる。そのため、速さが大きくなると、抵抗も大きくなる。一方で、重力の大きさは、速度に無関係に一定である。力と加速度は、後の章で扱うように運動方程式で関係する。そのため、今の場合、加速度は

$$a = g - \frac{b}{m}v \tag{2.66}$$

と速度に比例する項を持ち、一定ではない。速度が零の状態から始めた時、最初は加速度は重力加速度だけから成り、等加速度運動を行う。等加速度運動では、速度は時刻に比例して変化し徐々に大きくなる。速度が大きくなると、右辺第 2 項のために、加速度は減少する。そして、遂にある決まった速度

$$v_{\text{終}} = \frac{mg}{b} \tag{2.67}$$

で、重力加速度と抵抗による加速度がうち消す。これは、等速度運動である。これ以降は、加速度は零のままであり、速度が変化しない等速度運動が継続する。この速度では、下向の重力と逆向きの抵抗が釣り合ってい、二つをたした合力が零になっている。つまり、力が働かないのと同じである。

後で、微分方程式を解いて雨滴の位置や速度が、時間とともに変わる様子を具体的に求める。

2.5 問題

2.5.1 導関数

次の関数の導関数を求めよ。ただし、a, b, c, d は定数とし、n は整数とする。

$$
\begin{aligned}
&\sin ax, \\
&\cos bx, \\
&\exp(cx + d), \\
&\log x, \\
&x^n
\end{aligned}
$$

2.5.2 速度と加速度

位置座標が次の式で与えられる点の、速度と加速度をもとめよ。また、これらの点の運動の特徴を説明せよ。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}^1(t) &= (1, 2t + 3t^2, 4t), \\
\mathbf{x}^2(t) &= (5\sin 2t, 5\cos 2t, 0), \\
\mathbf{x}^3(t) &= (6\sin 2t, 6\cos 2t, 4t)
\end{aligned}
$$

2.5.3 等速円運動

ｘｙ面内で、原点を中心として半径Ｒ、角速度 ω の等速円運動をする質点の位置、速度、加速度を求めよ。速度は接線方向を向き、加速度は中心方向を向く事を確認せよ。

2.5.4 雨滴の落下

雨滴の位置が、

$$z(t) = \tag{2.68}$$

であるとして、速度、加速度を計算せよ。

解答

問題１

関数の導関数は、それぞれ

$$\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax,$$
$$\frac{d}{dx}\cos bx = -b\sin bx,$$
$$\frac{d}{dx}\exp(cx+d) = c\exp(cx+d),$$
$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x},$$
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

である。

問題 2

位置座標が次の式で与えられる点の、速度と加速度は、

$$\mathbf{x}^1(t) = (1, 2t+3t^2, 4t), \tag{2.69}$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^1(t) = (0, 2+6t, 4), \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}^1(t) = (0, 6, 0) \tag{2.70}$$
$$\mathbf{x}^2(t) = (5\sin 2t, 5\cos 2t, 0), \tag{2.71}$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^2(t) = (10\cos 2t, -10\sin 2t, 0), \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}^2(t) = (-20\sin 2t, -20\cos 2t, 0) \tag{2.72}$$
$$\mathbf{x}^3(t) = (6\sin 2t, 6\cos 2t, 4t) \tag{2.73}$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}^3(t) = (12\cos 2t, -12\sin 2t, 4) \tag{2.74}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}^3(t) = (-24\sin 2t, -24\cos 2t, 0) \tag{2.75}$$

である。

第3章　運動と力

物体の運動を引き起こす原因となるのが、力である。力が加わった物体は、速度が変化する加速度運動をする。また、力が変わると同じ物体の運動も変わる。では、運動と力の間にはいかなる関係があるのだろうか。本章では特に、大きさを持たない物体である質点について詳しく考察する。

3.1　物体の運動

放物運動、円運動、振動運動をはじめとして物体の運動には、様々なものがある。これらは、それぞれ異なる運動であるが、決まった運動の法則に従っている。大きさを持たない物体が力をうけて運動するとき、加速度が力に比例している。また、その比例係数は、物体に固有な値をもつ質量である。これら三つの物理量、 **加速度** a**、質量** m**、力** F の間にいつも成立する普遍的な関係式が、運動方程式であり力学法則の一つである。異なる力は、異なる運動を与えるが、運動の法則は同じである。

物体に力が働くと、物体には加速度が生じ、加速度運動をする。力 $\vec{F}$ が働いたために物体に生ずる加速度 $\vec{a}$ は、物体に固有の質量 m を使い

$$\text{物体の加速度} = \frac{\text{力}}{\text{質量}} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{3.2}$$

と表される。この式にと登場する3個の物理量の中で、加速度と力はベクトルであり、質量はスカラーである。だから、上のベクトルの等式より、加速度は力と同じ方向を向いている。また、等速直線運動は速度が一定である運動であり、加速度がゼロであり、等加速度運動は加速度が一定の運動である。等加速度運動では、加速度も力も一直線上をむいている。一方、半径が一定の円の上を物体が同じ速さで運動する円運動の場合には、加速度は中心方向を向いてい、力はやはり中心方向を向いている。また。その大きさは、半径に比例すると共に、角速度にも比例する。

3.1.1　物体の質量

質量は、非常に大事な物理概念であり、次にあげる性質を持っている。

（1）すべての物体は、一つの質量をもつ。
（2）一つの物体の質量は、運動していても静止していても変わらない。
（3）二つの物体を併せると、全質量は二つの値の和である。

質量に近いものに、物体の重量がある。物体の重量は、質量に重力加速度をかけたものであり、物体が置かれた状況に依存する。地球表面上では、ほぼ質量 $\times 9.8m/s^2$ であるが、月の上ではその 1/7 程度の大きさとなる。質量は、物体に固有のものであり、おかれた状況にはよらない。

3.1.2　力

では、力とは何だろうか？ 厳密な意味を与えるのは、実は、難しい。人間が、感覚的に理解できる力を、普遍的な意味を持ちまた定量的にきっちりと定義したのが、力学の力である。これと独立な力の定義は、存在しない。力をいろいろ変えて実験を行い、以下の事柄がわかる。

（1）力を 2 倍、3 倍、4 倍にすると加速度は、2 倍、3 倍、4 倍になる。

（2）質量を 2 倍、3 倍、4 倍にしたとき、加速度を変えないで一定になるようにするためには、力を 2 倍、3 倍、4 倍にする必要がある。

（3）質量を一定で、力を 2 倍、3 倍、4 倍にしたとき、加速度は 2 倍、3 倍、4 倍になる。

では、

問題

（1 ’）質量を 2 倍、3 倍、4 倍にするにはどうするか？
（2 ’）力を 2 倍、3 倍、4 倍にするにはどうするか？

3.1.3　様々な力

運動の原因となる力には、いろいろ多様なものが知られている。自然界に存在するこれらの力は、大きく 2 種類に分類出来る。その一つ目は、

（ 1）

万有引力、電気力、磁気力、電流間の力、重力

等である。これらの力は、自然界に存在する基本的な力であり、非常に普遍的な性質をもつとともに、さまざまな自然現象にかかわっている。

二つ目は

（ 2）

摩擦力、垂直抗力、弾力（バネの力)、

である。これらの力は、物質の効果で生じた力である。これらの力については、後で詳しく述べる。

バネの力

物質の効果で生じる力のひとつが、バネの力である。バネを引くと、バネの延びで力が引き起こされる。その力は、伸びに比例する大きさをもつ。

$$F = kx, \tag{3.3}$$

$$F : \text{力、} k : \text{定数、} x : \text{変位（延び）} \tag{3.4}$$

では、

$$F = kx \tag{3.5}$$

の確認をするにはどうしたらよいだろうか？
重力中の重さは、物体の質量に比例して

$$F = mg \tag{3.6}$$

であることが分かっている。この関係式、を使うのが一方法である。
それから、物体を放り投げた時に示す放物運動を使うのも一つの方法である。

3.2 運動の 3 法則

さて、物体の運動は、ニュートンの運動の 3 法則にしたがっている。これらの 3 法則により、単純な運動から複雑な運動まで、すべての運動が理解できる。
第一法則（慣性の法則）
力が働かない物体は、その状態を継続する。
第二法則（運動方程式）力が働く物体の加速度は、力に比例して、物体の加速度に反比例する。

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{3.7}$$

第三法則（作用反作用の法則）
一つの物体から他の物体に作用する力がある時、逆に反作用する力があり、反作用の力は、作用の力と大きさが同じで逆向きである。
運動の 3 法則を次に詳しく見てみよう。

3.3　第一法則（慣性の法則）

　すべての物体は、外部からの力の作用を受けなければ、あるいは、外部からの力の総和が零ならば、一定の運動状態を保ち続ける。すなわち、静止している物体は静止の状態を続け、運動している物体は等速度運動を続ける。これを、慣性の法則という。たとえば、次の事柄が慣性の法則が成立することを示している。

　（１）紐につながって等速円運動をしている物体は、紐が突然切れたとき切れた瞬間における速度ベクトルを保って等速度運動を続ける。

　（２）

　なめらかな氷の上で、物体を滑らせると、物体は初めの速度のままの運動を続ける。

　（３）

　傾斜角をもつなめらかな坂から物体を滑らせると、加速度をもつ運動をするが、傾斜角を零にすると、加速度は零になる。

　力が働かない物体は、静止したものが静止状態を続けるか、または速度をもつ物体が同じ速度のままで運動を保つ。等速度運動には、力が働いていないことを明確にした事が重要である。

3.4　ベクトルの計算

力学に登場する物理量は、位置、速度、加速度、力等すべて方向と大きさを共に決めて一つ決まるベクトルである。ベクトルの諸性質や４則演算は単なる実数と異なる点がある。ここで、ベクトルについてまとめておく。

3.4.1　ベクトルの等価性

位置、速度、加速度はベクトルである。物体の位置を決めるためには、二次元空間では２つの実数、三次元空間では３つの実数が必要である。これらで、大きさと方向が決まる。

ベクトルは、もともと、大きさだけをもつスカラーとは異なり、大きさと方向を決めてひとつが決まる。二つのベクトルは、大きさと方向が同じであるとき、等しいベクトルである。運動の第二法則と第三法則はベクトルの関係式である。そのため、ベクトルの足し算、引き算、掛け算、割り算の４則演算を定義しておくと、みとうしの良い系統的な計算が行える。

ベクトルとは、方向と大きさの両方をもち、成分で

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) \tag{3.8}$$

と表わされる。成分の厳密な定義は、後でなされる。

3.4.2　ベクトルの４則演算

ベクトルの和

ベクトルの射影やベクトルの足し算（加法）を先ず定義しよう。

二つのベクトルの和は、それぞれのベクトルを２辺とする平行４辺形の対角線ベクトルをさす。式では、

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \tag{3.9}$$

とあらわし図の通りである。

ベクトルのスカラー倍

ベクトル $\vec{a}$ の大きさだけを、λ 倍するとき、

$$\lambda\vec{a} = \vec{c} \tag{3.10}$$

とあらわす。ベクトル $\vec{c}$ は、λ が正の実数であるとき $\vec{a}$ と同じ方向であり、λ が負であるとき、$\vec{a}$ と逆向きのベクトルである。

ベクトルの引き算

引き算（減法）は、足し算の逆である。

$$\vec{a} = -\vec{b} + \vec{c} \tag{3.11}$$

となるベクトル $\vec{a}$ は、

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \tag{3.12}$$

を満たすベクトルのことであり

と図示される。

3.4.3　ベクトルの成分による表示

単位ベクトル $\vec{e}_1$ は、 大きさを 1 とするベクトルである。このベクトルの方向を向いた大きさを x 倍したベクトルは、スカラー倍

$$x\vec{e}_1 = \vec{x} \tag{3.13}$$

で表わせる。次に、もう一つの上と異なる単位ベクトル $\vec{e}_2$ があったとする。新たなベクトルの方向をむいた大きさを y 倍したベクトルは、やはりスカラー倍

$$y\vec{e}_2 = \vec{y} \tag{3.14}$$

で表わせる。

これらの二つのベクトルの和は、同じ平面内にある。

逆に、一つの平面内にある任意の位置ベクトルを二つのベクトルの和、

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}, \tag{3.15}$$

$$\vec{x} = x\vec{e}_1, \vec{y} = y\vec{e}_2 \tag{3.16}$$

で表わすことができる。

二つのベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ が直交するとき、二つのベクトルが作る平行４辺形は直方体になり和は最も簡単になる。そのため、通常このような二つのベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ を直交する単位ベクトルという。

3.4.4 内積

二つのベクトルの内積を使うと、計算がさらに便利になる。内積は、それぞれのベクトルの大きさとベクトルの間の角度 θ から

$$(\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\theta \tag{3.17}$$

$$a : \vec{a}\text{の大きさ}, b : \vec{b}\text{の大きさ、}\theta\, 2\,\text{ベクトルの間の角度} \tag{3.18}$$

と定義される数である。

ここで、$a\cos\theta$ は $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に射影した足の長さであり、図の解析からわかるように分配則

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}) \tag{3.19}$$

$$(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c}) \tag{3.20}$$

を満たしている。

二つの零でないベクトルは、内積が零になるとき、すなわち

$$(\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\theta = 0 \tag{3.21}$$

であるとき、直交している。

デカルト座標における単位ベクトル

例えばデカルト座標での大きさ１のベクトル

$$\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1) \tag{3.22}$$

は互いに直交していて、内積が

$$\begin{aligned} &(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 1, (\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 0, (\vec{e}_1,\vec{e}_3) = 0 \\ &(\vec{e}_2,\vec{e}_1) = 0, (\vec{e}_2,\vec{e}_2) = 1, (\vec{e}_2,\vec{e}_3) = 0 \\ &(\vec{e}_3,\vec{e}_1) = 0, (\vec{e}_3,\vec{e}_2) = 0, (\vec{e}_3,\vec{e}_3) = 1 \end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。二つのベクトル

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \tag{3.24}$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \tag{3.25}$$

の内積は、分配則を使うと、

$$\begin{aligned} &(\vec{a},\vec{b}) \\ &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1(\vec{e}_1,\vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1,\vec{e}_3) \\ &+a_2b_1(\vec{e}_2,\vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2,\vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2,\vec{e}_3) \\ &+a_3b_1(\vec{e}_3,\vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3,\vec{e}_2) + a_3b_3(\vec{e}_3,\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned} \tag{3.26}$$

と成分の積の和となる。

$$(\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{3.27}$$

つまり

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|a||b|} \tag{3.28}$$

となっている。

大きさが１で、互いに直交するベクトルの関係を

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j) = \delta_{ij} \tag{3.29}$$

と表わす。

ベクトルの微分

時間の関数としてのベクトル $\vec{x}(t)$ から、微分を定義する。

ベクトルの微分

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} \tag{3.30}$$

位置ベクトル $\vec{x}(t)$、速度ベクトル $\vec{v}(t)$、加速度ベクトル $\vec{a}(t)$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{v}(t) \tag{3.31}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t) \tag{3.32}$$

内積の微分

時間に依存する二つのベクトルの内積

$$(\vec{a}(t), \vec{b}(t)) \tag{3.33}$$

はやはり、時間の関数である。だから、内積の微分は

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t), \vec{b}(t)) = (\frac{d}{dt}\vec{a}(t), \vec{b}(t)) + (\vec{a}(t), \frac{d}{dt}\vec{b}(t)) \tag{3.34}$$

となる。

ベクトルの積分は、微分の逆演算で定義される。

3.4.5 外積 (ベクトル積)

ベクトル積

ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ の外積（ ベクトル積）は成分を

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{3.35}$$

とするベクトルのことであり、

$$\vec{a} \times \vec{b} \tag{3.36}$$

と表記する。外積ベクトルの大きさは、二つのベクトルの間の角 θ の正弦関数より、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \sin\theta, \tag{3.37}$$

となり、方向は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する面内で、$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじを回してねじが進む方向である。

同じベクトルの外積は、

$$\vec{a} \times \vec{a} = (a_2 a_3 - a_3 a_2, a_3 a_1 - a_1 a_3, a_1 a_2 - a_2 a_1) = (0, 0, 0) \tag{3.38}$$

と零ベクトルであり、零ベクトルとの外積は、

$$\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \tag{3.39}$$

といつも零ベクトルになる。また、

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{3.40}$$

ならば、

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \tag{3.41}$$

が成立している。

分配則と単位ベクトル

ベクトル積は分配則

$$\vec{c} \times (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \vec{c} \times \vec{a} + \mu \vec{c} \times \vec{b} \tag{3.42}$$

を満たす。だから、単位ベクトルの間のベクトル積が分かれば、任意のベクトルのベクトル積が分かる。デカルト座標系における単位ベクトルは、

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\ &\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \\ &\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

を満たしている。上の９個の関係式は、まとめて

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \tag{3.44}$$

と完全反対称テンソル ϵ_{ijk} で書かれる。完全反対称テンソル ϵ_{ijk} は、各 ijk に対して、

$$\epsilon_{ijk} = 0, i = j, i = k, j = k \tag{3.45}$$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1,$$

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{123} = \epsilon_{123} = -1,$$

$$\tag{3.46}$$

となり、また反対称の性質

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} \tag{3.47}$$

を満たしている。

　これより、二つのベクトルの外積は、

$$\begin{aligned}(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) &= a_i b_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j \\ &= \epsilon_{kij}\vec{e}_k a_i b_j\end{aligned} \tag{3.48}$$

とまとめられる。だから、ベクトル積の i 成分は、

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{3.49}$$

である。

3.4.6　一般の単位ベクトル

　内積が関係式 (3.23) を満すとき、単位ベクトルといい、さらに外積が (3.44) を満すとき、右手系の単位ベクトルという。逆の場合、左手系という。

　デカルト座標における、単位ベクトルに加えて、他の座標系、たとえば球座標においても単位ベクトルを定義する。

3.5　第二法則（運動方程式）

　運動の第 2 法則は、力が働くことによって生ずる物体の運動を表わす運動方程式である。物体には、力に比例して加速度が生じる。加速度は、速度の変化率であり、比例係数は質量である。質量は、物体の属性を表わし、力の大きさや加速度の大きさには無関係な定数である。

　大きさを無視できる物体の位置は一組の位置座標だけで決めることができる。このような物体を質点といい、最も簡単に扱える。しばらくの間、質点だけを考察する。質点に力を加

えた時、加速度が生ずる。加速度は、力に比例して質量に反比例する。この関係式を、運動方程式と呼ぶ。運動方程式は、力によって物体に運動が引きおこされ、運動の加速度が、力に比例して物体の質量に反比例することを示す。

加速度や力は、方向と大きさをもつベクトルである。そのため、運動方程式はベクトルの間の関係式である。物体に加えられる力を $\vec{F}$、力によって引き起こされる物体の加速度を $\vec{a}$、物体の質量を m とすると、

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{3.50}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \tag{3.51}$$

の関係が成り立つ。

運動方程式に現れる質量は物体に固有のものであり、すべての物体は一つの質量を持つ。つまり、すべての物体は、決まった値の質量をもっていて、如何なる力が働く場合でも、力の大きさや性質に無関係に同じ上の式が成立する。ニュートンが見つけたこの関係式は、最も普遍的で、かつ重要な関係式の一つである。

では、力とは何であろうか？

我々は日常の感覚で、重いものを持ち上げる力は、軽いものを持ち上げる力よりも大きく、またより速く走るためには、より大きな力が必要であることを知っている。しかし、力が何であるかを厳密に示すのは困難である。力が何であるかを示すのは、ニュートンの運動方程式だけである。

ニュートンの運動方程式は、質量と力と加速度の間の関係式であり、また、質量と力の定義を与えながら、同時にそれらが満たす関係を示している。つまり、概念の定義は、その概念が満たす関係式と対になって与えられている。この事情は、一見無意味な、トウトロジーの事柄を述べているかに見えるかも知れないが、逆に非常に重要なことを示している。

3.5.1 物体の様々な運動

重力

質量 m の物体には、地球の重力 mg が下向きに働いている。このため、加速度は、$\frac{mg}{m} = g$ となり、すべての物体に共通である。この重力は、後で述べる万有引力の形が変わったものである。

物体の等速円運動

質量 m の物体が、半径 R の円上で角速度 ω で等速円運動しているとき、加速度は中心方向を向き、大きさは $R \quad \omega^2$ である。そのため、中心方向の力 F は、

$$F = mR\omega^2 \tag{3.52}$$

である。この向心力はひもが物体に与えているので、ひもが切れてしまうと働くことは出来ない。ひもが切れると、この中心力が働かなくなり、物体はその瞬間における速度の方向である接戦方向に速さ $R\omega$ で飛んでゆく。

雨滴の落下

小さな雨粒は、重力のために落下運動をする。自由落下では、速度に上限はないが、実際の水滴では速さに上限がある。最初、静止していた雨滴は、落下を始めると徐々に速さが大きくなるが、やがて上限の値に達する。この後は、一定の速さのまま等速度運動をする。等速度運動は、慣性の法則より、力が働かない物体が行う運動である。では、重力が働いているにも拘らず力が働かないのは、重力以外の別の力が働いているからである。この別の力は、空気からの抵抗による力である。しかも空気抵抗の力は、速さに比例する大きさと速度とは逆方向を向いている。だから、速さが大きくなって丁度重力と釣り合う大きさになったとき、力の合力は零である。雨滴はこれ以降、一定の速さで落下する。

ケプラーの法則と万有引力の法則

ケプラーの法則は、太陽の周りの惑星の運行に関する法則である。ケプラーの法則から、太陽と惑星の間の力についての重要な情報が得られた。万有引力が太陽の方向を持ち、大きさは太陽からの距離の二乗に反比例する事が分かった。

単振動

自然長 x_0 のバネを x まで伸ばすか、縮める場合、変位に比例する力

$$F = -k(x - x_0) \tag{3.53}$$

が働く。$x = x_0$ では、力が働かないので、

$$x(t) = x_0 \tag{3.54}$$

は、運動の一つの解である。

$$x(t) = x_0 \tag{3.55}$$

は、運動方程式の解であるが、他の位置では静止解は存在しない。他の位置を $t = 0$ での位置とする場合、その後の運動は、周期的運動をする。

原子核と電子

物質の構成要素である原子は、中心部の正電荷を持つ原子核と負電荷を持つ周りの電子が、電気的な引力で束縛した状態である。電気的な力は、電荷の積に比例し、それらの距離に反比例する。

散乱、軌道の変化

等速度運動する粒子に、ある小さな有限区間力が加わると加速度が生じる。その結果として速度ベクトルは最初のものから変わる。力が零になった後では、速さはもとのの値であり、しかし速度ベクトルが変わる。速度ベクトルの変化の仕方は、力で決定される。

3.6 第三法則（作用・反作用の法則）

運動の第三法則は、作用・反作用の法則とも呼ばれ、二つの物体が力を及ぼしあう際の二つの力の関係を示す。物体 A と物体 B が力を及ぼしあっているとき、A が B に及ぼす力 $\vec{F}_B$ は B が A に及ぼす力 $\vec{F}_A$ と同じ大きさで、方向は逆であり、

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \tag{3.56}$$

となる。A に及ぼす力は、A の運動を決め、B に及ぼす力は、B の運動を決める。

3.6.1 質量の和

ニュートンの運動方程式と作用反作用の法則を使い、二つの物体の全質量は、それぞれの質量の和であることを示せ。

解答：

物体 A と物体 B が、図のように接しているとする。物体 A に外力 $\mathbf{F}$ を与えて両物体を並行に運動させる。外力のために両物体が一緒に加速度 $\mathbf{a}$ で運動したとしよう。今の場合、物体 A が力 $\mathbf{f}$ で物体 B をおすとする。このとき、作用反作用の法則から、物体 B が力 $-\mathbf{f}$ で物体 A をおすことになる。二つの物体にかんする運動方程式は、

$$M_a\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{f} \tag{3.57}$$

$$M_b\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{3.58}$$

である。この二つの等式を足して、

$$(M_a + M_b)\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{3.59}$$

が得られる。これから、全体の質量は、$M_a + M_b$ であることが分かる。この結果より、二つの物体の全質量は、二つを加えたものであることが分かる。

例 2

ニュートンの運動方程式を確認する（実験）方法を考えよ。

ガリレオと慣性の法則

ニュートンの運動の法則で第１法則 ”慣性の法則 ”は、ニュートンの前にガリレオが、斜面上での物体の運動の実験から、発見したものである。斜面上の物体の運動の実験は身近なところで行われた。斜面の傾きを変えると共に、摩擦のない斜面を工夫して理想的な状況を実現して確認された関係である。これらの地球上で行われた実験と異なり、ケプラーの法則は惑星の運動の観測から得られた。運動の第２法則を導くにあたり、重要な働きをしたケプラーの法則が、地球上とは全く異なる環境の考察で得られたことは、きわめて教訓的である。物体の運動法則が、地球上における身近な場所における実験と地球外における惑星の運動という全く異なる領域での現象を総合して得られたわけである。自然の普遍的な法則が存在することを明確に示した点でも、重要である。

物体に力が働かないとき、それは静止しているか、または等速度運動を行う。このように、等速度運動の場合も力が働かないことを発見した点が、重要である。この慣性の法則から、逆に力の概念がより確固としたものになった。

3.7 問題

1 ベクトルの積

ベクトルの内積 $(\vec{a},\vec{b})$ と外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは、

$$(\vec{a},\vec{b})^2+(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2 \tag{3.60}$$

を満たすことを示せ。

2 慣性の法則

力が働いていない物体は、静止するか等速度運動する。だから静止している物体には、力が働かないていない。次の状況で、物体には、いかなる力が働いているか、考察せよ。

（１）床の上の静止した机、水に浮いて静止しているボート、一定の速度で落下する水滴、一定の速度で水中を落下する石、

３運動方程式

一定の力 F が一つの物体に働いているときの加速度が、a であるとする。この物体を二つつなげた物体に同じ力が働いたときの加速度はいくらか？３つの場合は、どうか？

4　作用・反作用の法則

二つの物体 A, B が互いからの力を受けて運動している。それぞれの質量が等しい時、Aの加速度が a_1 であるとき、Bの加速度はいかなる値か？また、Aの質量がBの２倍であるときは、どのような加速度の関係になるか？

5 ベクトル

二つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{3.61}$$

を満たす時、任意の $\vec{c}$ に対して

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \times \vec{c} &= \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned} \tag{3.62}$$

が成り立つことを示せ。では、任意の $\vec{c}$ に対して

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \tag{3.63}$$

が成り立つ時、

$$\vec{a} = \vec{b} \tag{3.64}$$

となるか？また、

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \tag{3.65}$$

の場合は、どうか。

解：

１。

証明：成分を使い、

$$(\vec{a}, \vec{b})^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \tag{3.66}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \tag{3.67}$$

となるので、

$$\begin{aligned} &(\vec{a}, \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned} \tag{3.68}$$

ここで、右辺を a_1 についてまとめる。a_1^2 の係数は、

$$b_1^2 + b_3^2 + b_2^2 \tag{3.69}$$

となり、a_1 の係数は

$$2b_1(a_2b_2 + a_3b_3) - 2b_3a_3b_1 - 2b_2a_2b_1 = 2b_1(a_2b_2 + a_3b_3 - a_2b_2 - a_3b_3) = 0 \tag{3.70}$$

となる。同様に a_2 と a_3 についてまとめて、

$$a_2^2(b_1^2 + b_3^2 + b_2^2) \tag{3.71}$$
$$a_3^2(b_1^2 + b_3^2 + b_2^2) \tag{3.72}$$

となるので、右辺は

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_3^2 + b_2^2) = \vec{a}^2\vec{b}^2 \tag{3.73}$$

となる。よって、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \tag{3.74}$$

ならば、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \tag{3.75}$$

である。

　2．

　床の上の静止物体：　下向きの重力と床からの上向きの抗力が働く。重力は、質量に比例した一定の大きさを持つ。だから抗力は、物体の質量によって変わる値に成っている。

　水上のボート：ボートには下向きの重力に加えて上向きの浮力が働いている。上向きの浮力の起源は、水にある。

　落下する水滴：

第4章　運動方程式

運動の第2法則である運動方程式は、物体の加速度が力で決まることを示す。物体の加速度は、位置の時間についての2階微分である。つまり、物体の運動の仕方に対する普遍的な法則が存在し、その法則が微分方程式で与えられた。運動方程式から、位置ベクトルの時間についての2階微分が分かる。微分を積分すれば、速度や位置も分かる。このため、力がわかれば位置に関する微分方程式を解くことにより運動が解かれ、位置が時間とともにどのように変化するかがもとめられる。

微分方程式は、物理量の動的な変化に関する自然法則の記述には、必須である。このような自然科学の考えは、力学でまづ始まった。その後他の多くの科学の分野が、同じ考えで理解できることがわかった。ニュートンが、このような考えをうちたてたわけである。

4.1　運動の微分方程式

微分方程式の理解のために、まず積分の復習をしておこう。

積分は、微分の逆の演算である。

幾何学的には、微分 $f'(x)$ は曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きであったが、積分は曲線 $y = f(x)$ と x 軸が囲む領域の面積 $S(x)$ を表す。

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \tag{4.1}$$

で、図からわかるように

$$S(x+h) = S(x) + hf(x) + O(h^2) \tag{4.2}$$

であることから、

$$
\begin{aligned}
S'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \\
&= f(x).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

だから、$f(x)$ は $S(x)$ の微分であり、$S(x)$ は $f(x)$ の積分である。

記号として、

$$
S(x) = \int_{x_0}^{x} dx f(x) \tag{4.4}
$$

と表すことにする。これは、x_0 から x までの領域の面積を表し、x_0 を積分の下限、x を積分の上限という。

4.1.1 一定の力

簡単な力が加わった物体における運動方程式を、解いてみよう。
一定の力 $\vec{F}$ が働く、質量 1 の物体が従う微分方程式

$$
\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \vec{F} \tag{4.5}
$$

を解くには、両辺を積分すればよい。積分の上限を t_1 下限を t_0 とする。

$$
\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} dt\vec{F} \tag{4.6}
$$

左辺と右辺をそれぞれ積分して、

$$
\frac{d}{dt}\vec{x}(t)|_{t_0}^{t_1} = \vec{F}t|_{t_0}^{t_1} \tag{4.7}
$$

$$
\frac{d}{dt}\vec{x}(t)|_{t=t_1} - \frac{d}{dt}\vec{x}(t)|_{t=t_0} = \vec{F}(t_1 - t_0) \tag{4.8}
$$

を得る。次に上限の値 t_1 の代わりに t を使うことにする。すると、t_0 での速度を $\vec{v}_0$ として一般解が

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{v}_0 + \vec{F}(t - t_0) \tag{4.9}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)|_{t=t_0} \tag{4.10}$$

と得られる。

次に、同じ計算を繰り返して、、t_0 での位置を $\vec{x}_0$ として一般解

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{F}\frac{1}{2}(t - t_0)^2 + \vec{x}_0 \tag{4.11}$$

$$\vec{x}_0 = \vec{x}_{t=t_0} \tag{4.12}$$

が得られる。これで、微分方程式が解かれた。得られた位置ベクトルは、運動方程式にある量 $\vec{F}$ 以外に、運動方程式には含まれていない $\vec{v}_0$ と $\vec{x}_0$ をもつことがわかる。このように、この解は、運動方程式に現れない項を含んでいる。この項は、$t = t_0$ での速度と位置を表すベクトルである。これを決定する条件は、初期条件と呼ばれ、運動の解を一つ決めるために必要となる条件式である。今の場合、微分が 2 階であることから、各積分ごとに積分定数を決めるために初期条件は二つである。

4.1.2 変位に比例する力

次に、1 次元空間で変位に比例する引力が働く質量 m の物体の運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \tag{4.13}$$

を解く。

この問題は、等速円運動と密接に関係している。等速円運動では、加速度が中心方向を向いた半径に比例する大きさの力であった。この力を、二つの直交する x, y 軸方向に分解すれば、

$$F_x = -kR\cos\theta = -kx \tag{4.14}$$

$$F_y = -kR\sin\theta = -ky \tag{4.15}$$

と、それぞれの成分が、変位に比例する。等速度円運動は、質点が一定の角速度で中心の周りを円運動するので明らかに周期運動である。だから、各成分の運動も、やはり周期運動となるはずである。

先ず、三角関数と指数関数の微分を求める。

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t, \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t \tag{4.16}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t, \frac{d^2}{dt^2}\sin\omega t = -\omega^2\sin\omega t \tag{4.17}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{at} = a^2e^{at} \tag{4.18}$$

a が実数であるとき、

$$e^{iat} = A(t) + iB(t) \tag{4.19}$$

とおいてみよう。すると、両辺の微分から

$$iae^{iat} = A'(t) + iB'(t) \tag{4.20}$$

$$ia(A(t) + iB(t)) = -aB(t) + iaA(t) \tag{4.21}$$

が得られ、二つの関数は微分を通して関係

$$A'(t) = -aB(t), B'(t) = aA(t) \tag{4.22}$$

を満たすことがわかる、この関係式は、上にある三角関数の関係と全く同じである。

ところで関数を、べき級数で表わすことができる。これを、テイラー展開という。

テイラー展開

任意の t の関数 $f(t)$ の値を、$t=0$ における微分係数で近似する公式がテイラー展開、

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)t^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)t^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)t^4 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)t^n + \cdots \tag{4.23}$$

である。原点における任意な微係数が、両辺で一致することが次のように簡単に確かめられる。

右辺の $t=0$ での関数値やその微分の値は、

$$f(0), f'(0), f^{(2)}(0), f^{(3)}(0), f^{(4)}(0), f^{(n)}(0) \tag{4.24}$$

となり、また左辺の $t=0$ における関数値、一階微分、２階微分、等の値も同じになる。これより、両辺が一致することがわかる。

このようにテイラー展開は、任意の t における関数の値を $t=0$ における関数値、一階微分、２階微分、等の値で表わす。テーラー展開は、右辺のべき展開が収束する限り、使える展開式（近似式）である。任意の t における値が、原点における関数値や微係数で決まるのは、不思議に思えるかもしれない。しかしながら、関数の微分は、異なる t での関数の差か

ら決まるので、原点における n 階微分は、n この異なる t における関数の値できまっていたわけであり、テイラー展開は、自然な近似式である。

平均値の定理

テーラー展開の厳密な証明には、平均値の定理が使われる。付録に平均値の定理が証明されている。

定理

任意の微分可能な関数 $f(t)$ に対して、次の等式を満足する ϵ が必ず存在する。

$$f(t) - f(0) = tf'(\epsilon t), \epsilon \leq 1 \tag{4.25}$$

平均値の定理は、t における関数の値と 0 における関数の値との差が、必ず二つの間における一つの点 ϵt における微係数でかけることを述べる。上の式を、

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(\epsilon t), \epsilon \leq 1 \tag{4.26}$$

と表わすと、左辺は関数 $f(t)$ の原点 $t = 0$ と $t = t$ での平均変化率であり、右辺は $t = \epsilon t$ における微分係数である。だからこの定理は、関数の 2 点における平均変化率の値の微係数をもつ点が、 2 点の間に必ず存在する、ことを表わしている。

平均値の定理をさらに使うことにより、

$$f(t) - (f(0) + tf'(0) + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)) = \epsilon t^n f^{(n)}(\epsilon t), \epsilon \leq 1 \tag{4.27}$$

が得られる。

平均値の定理を繰り返し使うことにより、テーラー展開が得られる。

例　1

$f(t)=e^{iat}$ に対するテイラー展開は、$f^{(n)}(t)=(ia)^n e^{iat}$ から $f^{(n)}(0)=(ia)^n$ となり

$$\begin{aligned} f(t) &= 1+iat+\frac{1}{2!}(iat)^2+\frac{1}{3!}(iat)^3+\frac{1}{4!}(iat)^4+\frac{1}{n!}(iat)^n+\cdots \qquad (4.28) \\ &= (1-\frac{1}{2!}(at)^2+\frac{1}{4!}(at)^4+\frac{1}{(2n)!}(-1)^n(at)^{2n}+\cdots) \\ &\quad +i(at-\frac{1}{3!}(at)^3+\cdots\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n(at)^{2n+1}+\cdots) \qquad (4.29) \end{aligned}$$

である。

例2

$g(t)=\cos at$ に対するテイラー展開は、三角関数の微分を使い

$$g(t)=1-\frac{1}{2!}(at)^2+\frac{1}{4!}(at)^4+\frac{1}{(2n)!}(-1)^n(at)^{2n}+\cdots \qquad (4.30)$$

となる。

例3

$h(t)=\sin at$ に対するテイラー展開は、

$$h(t)=at-\frac{1}{3!}(at)^3+\cdots\frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n(at)^{2n+1}+\cdots \qquad (4.31)$$

となる。$f(t),g(t),h(t)$ の式の右辺を比較して、

$$e^{iat}=\cos at+i\sin at \qquad (4.32)$$

が得られる。

これより、

$$e^{-iat}=\cos at-i\sin at \qquad (4.33)$$

が得られる。また三角関数を指数関数で表す関係式として

$$\cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}) \tag{4.34}$$

$$\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat}) \tag{4.35}$$

が成立する。

微分方程式の解

さて、微分方程式 (4.13) を

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.36}$$

と書き表そう。三角関数の微分式から、関数

$$\cos\omega t, \sin\omega t \tag{4.37}$$

が、微分方程式を満たすことが容易にわかる。また、この微分方程式は 2 階の微分方程式であるので、解は二つの積分定数を含む。このような性質を持つ解は、二つの関数の線形結合

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{4.38}$$

である。A, B は t に依存しない定数である。また、これと異なる表現

$$x(t) = C\cos(\omega t + \alpha) \tag{4.39}$$

で表すこともできる。この時、定数 A, B は定数 C, α で

$$A = C\sin\alpha, B = C\cos\alpha \tag{4.40}$$

と表すことができる。

初期条件

初期条件として、$t = 0$ での位置と速度 $x(0), \dot{x}(0)$ が決まっているとしよう。

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{4.41}$$

となることを使い、定数 A, B は、

$$x(0) = A, \dot{x}(0) = -B \tag{4.42}$$

と決まる。

テイラー展開を用いて微分方程式を解く

次に、微分方程式 (4.13) の解を

$$x(t) = \sum_l a_l t^l \tag{4.43}$$

とテイラー展開の形を仮定してみよう。ここで、係数 a_l は今のところ未定であり、この関数が微分方程式を満たすことを要請して、決まる。この関数の微分は

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_l a_l l t^{(l-1)} \tag{4.44}$$

$$(\frac{d}{dt})^2 x(t) = \sum_l a_l l(l-1)t^{(l-2)} \tag{4.45}$$

である。よって、微分方程式に代入して、

$$\sum_l a_l l(l-1)t^{(l-2)} + \omega^2 \sum_l a_l t^l = 0 \tag{4.46}$$

となる。さらにこの式で、t の冪をそろえて、

$$\sum_l a_{l+2}(l+2)(l+1)t^l + \omega^2 \sum_l a_l t^l = 0 \tag{4.47}$$

と表わして、最後に係数をまとめて

$$\sum_l (a_{l+2}(l+2)(l+1) + \omega^2 a_l)t^l = 0 \tag{4.48}$$

とする。この関数が微分方程式を満たすのは、t の値に無関係に上式が零になる時である。だから、係数は漸化式

$$(a_{l+2}(l+2)(l+1) + \omega^2 a_l) = 0 \tag{4.49}$$

を満たし、さらに簡単にして

$$a_{l+2} = -\frac{\omega^2}{(l+2)(l+1)} a_l \tag{4.50}$$

と書かれる。級数は、l が偶数の場合は、$\cos\omega t$ 奇数の場合は $\sin\omega t$ になる。

4.1.3　放物体の運動

放物体の受ける力は、ｚ軸方向の重力である。このため、放物体は、z 軸方向に一定の重力加速度と、x 軸方向の自由運動を示す微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = 0, \tag{4.51}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -g \tag{4.52}$$

に従う。この微分方程式は、単純な積分で解を求められる。一般解は、

$$x(t) = x_0 + v_x(0)t, \tag{4.53}$$
$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_z(0)t + z(0) \tag{4.54}$$

となり、またこの解の時間についての一階微分は、

$$\dot{x}(t) = v_x(0), \tag{4.55}$$
$$\dot{z}(t) = -gt + v_z(0) \tag{4.56}$$

となる。だから $t = 0$ での位置は、

$$x(0) = x_0, \tag{4.57}$$
$$z(0) = z(0) \tag{4.58}$$

また速さは

$$\dot{x}(0) = v_x(0), \tag{4.59}$$
$$\dot{z}(t) = v_z(0) \tag{4.60}$$

となる。

4.1.4 抵抗のある放物体の運動

空気中の物体には、重力以外に小さな空気の抵抗が働く。いま、速度に比例する大きさの抵抗が、運動の方向と逆の方向に働く場合、微分方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = g - b\frac{d}{dt}z(t) \tag{4.61}$$

となる。これは、複雑であるが、見やすい形に書換えることが可能である。

微分方程式を速度を使い次のように書換える。

$$\frac{d}{dt}v(t) = g - bv(t) \tag{4.62}$$

さらに、速度を定義し直して

$$\frac{d}{dt}\tilde{v}(t) = -b\tilde{v}(t) \tag{4.63}$$
$$\tilde{v}(t) = v(t) - \frac{g}{b} \tag{4.64}$$

が得られる。この最後の方程式は見慣れた式であり、解は、

$$\tilde{v}(t) = e^{-bt}\tilde{v}(0) \tag{4.65}$$

である。

4.2　微分方程式の解法

ニュートンの運動方程式は、加速度が力で決まる式である。加速度は、位置ベクトルの時間についての２階微分であるので、力が座標の関数として与えられた場合、運動方程式は、２階の微分方程式である。微分方程式を解くのは、ある程度の経験を要する。代数的な２次方程式では、根の公式でいつも解がわかる。しかし、微分方程式では、いつも適用できるような公式は存在しない。だから多くの場合、微分方程式を解くのは、難しい。問題を沢山解いて経験を積むのが、何よりも良いことである。

一階微分方程式

x を自変数とし未知の関数 $y(x)$ の一階微分 $y'(x)$ が、x,$y(x)$ と 関係式

$$F(x,y,y') = 0 \tag{4.66}$$

を満すとする。ここで、上式を y' について解いて、

$$y' = f(x,y) \tag{4.67}$$

の形に書換えておいてから、この式を解くことにする。

具体的な例で解法を示す。

例１。

関数の一階微分が、自変数 x で書かれる場合や、それに近い場合は、単純な定積分で解が求まる。

$$\begin{aligned} y' &= \sin x & (4.68) \\ y &= \int y' dx & (4.69) \\ &= \int dx \sin x \\ &= -\cos x + c \end{aligned}$$

上で、単純な積分で解がわかった。積分する際、積分定数が現れる。積分定数 c をきめるためには、さらに関数に条件をかす必要がある。例えば、一つの x における関数の値が決まれば、

$$\begin{aligned} y_1 &= -\cos x_1 + c & (4.70) \\ c &= y_1 + \cos x_1 \end{aligned}$$

と一つの値に決まる。

例 2。

以下の場合も、単純な定積分で解が求まる。

$$
\begin{aligned}
y' &= \exp ax && (4.71)\\
y &= \int y' dx && (4.72)\\
&= \int dx \exp ax\\
&= \frac{1}{a}\exp ax + c
\end{aligned}
$$

例 3。
次の方程式は、一見複雑な方程式に見えるが、

$$
y' = X(x)Y(y) \tag{4.73}
$$

方程式を

$$
\frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx \tag{4.74}
$$

と変形した後、単純な定積分で

$$
\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx
$$

と解が求められる。あとは、2 変数について不定積分を実行するだけである。
例えば、変化率が関数に比例する方程式は、

$$
\begin{aligned}
y' &= ay && (4.75)\\
\frac{dy}{y} &= adx && (4.76)\\
\int \frac{dy}{y} &= \int adx
\end{aligned}
$$

両辺を積分して、解がもとまる。

$$
\begin{aligned}
\log y &= ax + c && (4.77)\\
y &= y_0 e^{ax}, y_0 = e^c && (4.78)
\end{aligned}
$$

4.3 定数係数微分方程式

係数が定数である一階や 2 階の微分方程式は、物理で特に頻繁に表れる。
例 1

前述の自然現象で、変化率 $y'(x)$ が、その関数 $y(x)$ の x における値に比例する問題を扱った。このような、変化が値に比例する現象や事例は沢山ある。これは、ある物理量の変化を引き起こす原因が、その物理量にあるとき成り立つものである。このとき、比例係数を $-a$ として、方程式は

$$y' = -ay \tag{4.79}$$

であり、両辺を y で割って得られる、

$$\frac{y'}{y} = -a$$

を積分して、解が

$$\begin{aligned} log(y) &= -ax + C \\ y &= C\exp(-ax) \end{aligned}$$

と得られる。

また別の解法として、y を自変数とし、x を y の関数とみなして微分方程式を

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{a}\frac{1}{y} \tag{4.80}$$

と書き換える。その後、両辺を y で微分して解

$$x = \frac{-1}{a}\log y + C \tag{4.81}$$

を、得る。逆に y を求めて、上の解がもとまる。解 $y(x)$ は指数関数である。比例係数 $-a$ が正の値ならば、関数は急激に増大し、比例係数 $-a$ が負の値ならば、関数は急激に減少する。

例２

２階の定数係数方程式は、一階の方程式に帰着される。いま、２階の方程式が

$$y'' + (a+b)y' + aby = 0 \tag{4.82}$$

と書かれるとする。この方程式は、微分について因数分解して

$$\begin{aligned} & y'' + (a+b)y' + aby \\ & = (\frac{d}{dx} + a)(\frac{d}{dx} + b)y = 0 \end{aligned} \tag{4.83}$$

と表す事ができる。このように分解できるのは、微分演算子を $D = \frac{d}{dx}$ とすると、D の掛け算や D と数との掛算は

$$\begin{aligned} & D^m D^m = D^{m+n} \\ & Da = aD \end{aligned} \tag{4.84}$$

となる関係が満たされるからである。これより、明らかに

$$(D+a)(D+b) = D^2 + (a+b)D + ab \tag{4.85}$$

が成立する。

ここで、a と b が異なる時、二つの一階方程式

$$(\frac{d}{dx} + a)y = 0, (\frac{d}{dx} + b)y = 0 \tag{4.86}$$

の解がもとの２階の方程式の解となっている。そのため、もとの２階の方程式の解は

$$y = C\exp(-ax) + C'\exp(-bx) \tag{4.87}$$

である。２階方程式では、二つの積分定数が方程式の解に含まれている。それらは二つの x における y の値から、

$$\begin{aligned} y_1 &= C\exp(-ax_1) + C'\exp(-bx_1) \\ y_2 &= C\exp(-ax_2) + C'\exp(-bx_2) \end{aligned} \tag{4.88}$$

の解として決める事が出来るが、一つの x における y との y' の値から

$$\begin{aligned} y_1 &= C\exp(-ax_1) + C'\exp(-bx_1) \\ d_1 &= -aC\exp(-ax_2) - bC'\exp(-bx_2) \end{aligned} \tag{4.89}$$

の解として決める事も出来る。前者を境界条件、後者を初期条件という。

例外として a と b が等しい時、上の二つの一階方程式は一致するので、別の解法を必要とする。この時、

$$(\frac{d}{dx} + a)^2 y = 0 \tag{4.90}$$

の一つの解は、上の場合と同じで

$$(\frac{d}{dx}+a)y=0, \tag{4.91}$$

の解 $y=C_1\exp(-ax)$ である。
　二つ目の解は、

$$(\frac{d}{dx}+a)y=C_1e^{-ax} \tag{4.92}$$

の解として求める事ができる。この方程式 (4.92) を解くため、

$$y=g(x)e^{-ax} \tag{4.93}$$

と仮定して $g(x)$ を求めるのが、一つの解法である。この y の微分は

$$y'=g'e^{-ax}-age^{-ax} \tag{4.94}$$

となる。これを方程式 (4.92) に代入して、

$$\begin{aligned} & g'e^{-ax}-age^{-ax}+age^{-ax}=C_1e^{-ax} \\ & g'=C_1 \\ & g=C_1x+C_2 \end{aligned} \tag{4.95}$$

が得られ、さらに

$$y=(C_1x+C_2)e^{-ax} \tag{4.96}$$

が得られる。
　例３
　２階の微分方程式の右辺が零ではなく定数の場合、

$$y''+(a+b)y'+aby=c \tag{4.97}$$

の一つの特解は明らかに、

$$y=\frac{c}{ab} \tag{4.98}$$

である。
　また $c=0$ である場合の一般解は

$$y=C\exp(-ax)+C'\exp(-bx) \tag{4.99}$$

となる。ここで、C, C' は定数である。よって

$$y = \frac{c}{ab} + C\exp(-ax) + C'\exp(-bx) \tag{4.100}$$

が、二つの未定定数をもつ最も一般的な解である。実際、これが方程式を満たす事が簡単に確認できるであろう。

例４

単振動の方程式

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{4.101}$$

も、虚数を使い

$$(\frac{d}{dx} + i\omega)(\frac{d}{dx} - i\omega)y = 0 \tag{4.102}$$

と展開できる。そのため解は、

$$y = C\exp(i\omega x) + C'\exp(-i\omega x) \tag{4.103}$$

または、

$$y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \tag{4.104}$$

$$A = C + C', B = iC - iC' \tag{4.105}$$

と求まる。ここで、指数関数と三角関数との関係式、

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x \tag{4.106}$$

を使った。

4.4 問題

4.4.1 1.

長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。
速さ、加速度、力、ラジアン、振動数、

2.

（２ー１）
次の x の関数の x についての一階微分を求めよ

$$(1+x)^n, \log(1+x), e^{ax}, \cos\omega x, \sin\omega x$$

（２－２）

テイラー展開を使い、$\log(1+x)$ を冪級数で表せ。

3.

運動の３法則を説明せよ。

4.

一次元等加速度運動についての以下の問題に答えよ。

(4-1) 質量を M、力を F、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式を書き下せ。

(4-2) (4-1) の運動方程式の一般解を求めよ。ここで、一般解とは、積分定数を最大限もつ解のことである。

(4-3) $t=0$ での位置や速度が、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ とわかった時の解を求めよ。

5.

微分方程式についての以下の問題に答えよ。

(５-1) 質量を M、一定の力を F、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式を書き下せ。

(５-2) (５-1) の運動方程式の一般解を求めよ。ここで、一般解とは、積分定数を最大限もつ解のことである。

(５-3) $t=0$ での位置や速度が、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ とわかった時の解を求めよ。

６.

一次元単振子運動についての以下の問題に答えよ。

(6-1) 質量を M、力を $F=-kx$、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式を書き下せ。

(6-2) (6-1) の運動方程式の一般解を求めよ。ここで、一般解とは、積分定数を最大限もつ解のことである。

(6-3) $t=0$ での位置や速度が、$x(0)=A$、$\dot{x}(0)=$ とわかった時の解を求めよ。

問題　正解

1.
長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元は、

$$速さ = LT^{-1} \tag{4.107}$$
$$加速度 = LT^{-2} \tag{4.108}$$
$$力 = MLT^{-2} \tag{4.109}$$
$$ラジアン = 無次元 \tag{4.110}$$
$$振動数 = T^{-1} \tag{4.111}$$

である。
力の次元は、運動方程式より決まる。また、ラジアンの次元は扇型で、弧の長さと円周の長さで角度の大きさを定義するので、無次元である。

2.
（２－１）
次の x の関数の x についての一階微分は、

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} \tag{4.112}$$
$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x} \tag{4.113}$$
$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{4.114}$$
$$\frac{d}{dx}\cos\omega x = -\omega\sin\omega x \tag{4.115}$$
$$\frac{d}{dx}\sin\omega x = \omega\cos\omega x \tag{4.116}$$

である。
（２－２）
関数 $f(x)$ にたいして、テイラー展開は

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + f^2(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{4.117}$$

となる。
今の関数 $f(x) = \log(1+x)$ では、n 階微分は

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} \tag{4.118}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \tag{4.119}$$

$$f^{(n)}(x) = (-)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} \tag{4.120}$$

となるので、n 階微分の原点での値は

$$f^{(1)}(0) = 1 \tag{4.121}$$

$$f^{(2)}(x) = - \tag{4.122}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \tag{4.123}$$

である。これを、上の展開式に代入して対数関数の展開式

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \tag{4.124}$$

が得られる。

3.

運動の第 1 法則

慣性の法則：力が働かない時、物体は、静止したままであるか、等速度運動を続ける。

運動の第 2 法則

物体に力が働くとき、物体は加速度を持つ。加速度は、力に比例して、物体の質量に反比例する運動方程式が成立する：

$$\vec{a} = \frac{1}{M}\vec{F} \tag{4.125}$$

運動の第 3 法則

作用 · 反作用の法則

二つの物体が作用しあう際、A が B に作用する力と B が A に作用する力は、大きさが等しく、向きが逆である。

4.

一次元等加速度運動についての以下の問題に答えよ。

(4-1)

質量を M、 力を F、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式は、

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F \tag{4.126}$$

である。

(4-2)

(4-1) の運動方程式の一般解は、F と M が定数であることを使い両辺を逐次積分して

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{F}{M} \tag{4.127}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{F}{M}t + C \tag{4.128}$$

$$x(t) = \frac{F}{M}\frac{t^2}{2} + Ct + D \tag{4.129}$$

と得られる。ここで、C, D は未定の定数である。

(4-3)

$t = 0$ での位置や速度が、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ とわかった時の解を求めるため、先ず未定の定数（積分定数）C, D を含む上式から、

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{F}{M}t + C \tag{4.130}$$

$$x(t) = \frac{F}{M}\frac{t^2}{2} + Ct + D \tag{4.131}$$

と求めておく。これに、$t = 0$ を代入して、

$$\frac{d}{dt}x(0) = C = \dot{x}(0) \tag{4.132}$$

$$x(0) = D = x(0) \tag{4.133}$$

を得る。これより、未定の積分定数が決まり、

$$x(t) = \frac{F}{M}\frac{t^2}{2} + \dot{x}(0)t + x(0) \tag{4.134}$$

が求める解である。

6

(6-1) 質量を M、 力を $F=-kx$、位置を $x(t)$ とした運動方程式は、

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-kx(t) \tag{4.135}$$

である。

(6-2) 両辺を M でわって、

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\omega^2 x(t), \omega=\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{4.136}$$

をえ、さらに、1次微分を含む積

$$(\frac{d}{dt}+i\omega)(\frac{d}{dt}-i\omega)x(t)=0 \tag{4.137}$$

と書かれる。これより、解は、一次方程式

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt}-i\omega)x(t)=0 \\ (\frac{d}{dt}+i\omega)x(t)=0\end{aligned} \tag{4.138}$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt}-i\omega)x(t)=0 \quad &\rightarrow x(t)=e^{i\omega t} \\ (\frac{d}{dt}+i\omega)x(t)=0 \quad &\rightarrow x(t)=e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{4.139}$$

となる。一般解は、定数 C と D から

$$\begin{aligned}x(t)&=Ce^{i\omega t}+De^{-ic\omega}=C(\cos\omega t+i\sin\omega t)+D(\cos\omega t-i\sin\omega t) \\ &=(C+D)\cos\omega t+i(C-D)\sin\omega t\end{aligned} \tag{4.140}$$

(6-3) $t=0$ での位置や速度は,

$$x(0)=(C+D), \dot{x}(0)=\omega i(C-D) \tag{4.141}$$

である。これらが、$x(0)=A$、$\dot{x}(0)=0$ となるのは、

$$C=D, 2C=A \tag{4.142}$$

の時である。よって、解は

$$x(t)=A\cos\omega t. \tag{4.143}$$

問題２　物理学

2009 6 24 10:30-12:00

1.

長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。
速さ、加速度、力、ラジアン、振動数、面積、体積、

2.

(２ー１）
次の関数の x についての一階微分を求めよ

$$(1+x)^n, \log(1+x), e^{ax}, \cos\omega x, \sin\omega x, \cos^{-1} x$$

ただし、n は整数 a, ω は実数の定数とする。
（ ２ー２）時間 t の関数 $x(t) = A\cos\omega t$ が、
運動方程式

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \tag{4.144}$$

を満たすのは、A や ω が如何なる値の時か？ただし、M と k は正の実数の定数とする。

3.

運動の３法則を説明せよ。

4.

一次元等加速度運動についての以下の問題に答えよ。
(4-1) 質量を M、 一定の力を F、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式を書き下せ。
(4-2) (4-1) の運動方程式の一般解を求めよ。ここで、一般解とは、積分定数を最大限もつ解のことである。
(4-3) $t=0$ での位置や速度が、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ とわかった時の解を求めよ。

問題２　物理学　正解

1.

長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元は、
速さ、LT^{-1} 加速度 LT^{-2}、力 MLT^{-2}、ラジアン $M^0L^0T^0$、振動数 T^{-1}、面積 L^2、体積 L^3、

2.

（２－１）

次の関数の x についての一階微分は、

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} \tag{4.145}$$

$$\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x} \tag{4.146}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \tag{4.147}$$

$$\frac{d}{dx}\cos\omega x = -\omega\sin\omega x \tag{4.148}$$

$$\frac{d}{dx}\sin\omega x = \omega\cos\omega x \tag{4.149}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.150}$$

である。

ここで、最後の計算は、

$$y = \cos^{-1}x \tag{4.151}$$

は、逆関数であるので、

$$\cos y = x \tag{4.152}$$

が成立する。この両辺を微分して

$$\frac{d}{dx}y(-1)\sin y = 1 \tag{4.153}$$

がえられ、

$$\frac{d}{dx}y = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.154}$$

となる。

（２－２）時間 t の関数 $x(t) = A\cos\omega t$ が、

運動方程式

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \tag{4.155}$$

を満たすのは、

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -M\omega^2 A\cos\omega t \tag{4.156}$$

ω が

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{4.157}$$

となるとき。ただし A は任意。

3.

運動の 3 法則、本文参照。

4.

一次元等加速度運動についての以下の問題に答えよ。

(4-1) 質量を M、 一定の力を F、位置を $x(t)$ としてこれらの間になり立つ運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F \tag{4.158}$$

(4-2) (4-1) の運動方程式の一般解は、逐次積分して

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ft + v_0 \tag{4.159}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}Ft^2 + v_0 t + x_0 \tag{4.160}$$

である。ここで v_0, x_0 は積分定数である。(4-3) $t = 0$ での位置や速度が、$x(0)$、$\dot{x}(0)$ とわかった時の解

$$x(t) = \frac{1}{2}Ft^2 + \dot{x}(0)t + x(0). \tag{4.161}$$

微分方程式の解法

y'=X(x)Y(y) の型

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \rightarrow \int \frac{dy}{Y(y)} = \int dxX(x) \tag{4.162}$$

1.

$$\frac{dy}{dx} = ay \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dxa \rightarrow log\ y = ax + c \rightarrow y = e^c e^{ax} = Ce^{ax} \tag{4.163}$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = axy \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dxax \rightarrow log\ y = a/2x^2 + c \rightarrow y = e^c e^{a/2x^2} = Ce^{a/2x^2} \tag{4.164}$$

3.

$$\frac{dy}{dx} = axy^2 \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dxax \rightarrow -1/y = a/2x^2 + c \rightarrow y = \frac{-1}{ax^2/2 + c} \tag{4.165}$$

y'-ay=f(x) の型

$$(\frac{d}{dx} - a)y = e^{bx} \tag{4.166}$$

右辺が零であれば、解は e^{ax} である。これより、方程式の解を $y = e^{ax}u(x)$ と仮定する。

$$y' = (e^{ax})'u(x) + e^{ax}u' = ae^{ax}u(x) + e^{ax}u' \tag{4.167}$$

$$\begin{aligned}
&(au(x) + u' - au(x))e^{ax} = e^{bx} \qquad (4.168)\\
&u' = e^{(b-a)x}\\
&u = \frac{1}{(b-a)}e^{(b-a)x}
\end{aligned}$$

よって、

$$y = \frac{1}{(b-a)}e^{bx} \tag{4.169}$$

ただし $b - a = 0$ のときは、

$$\begin{aligned}
&(au(x) + u' - au(x))e^{ax} = e^{ax} \qquad (4.170)\\
&u' = 1\\
&u = x\\
&y = xe^{ax} \qquad (4.171)
\end{aligned}$$

問題 ()

１.

一次元単振子運動についての以下の問題に答えよ。

(1-1) 質量を M、 力を $F=-kx$、位置を $x(t)$ として運動方程式を書き下せ。また、力学的エネルギー（運動エネルギーと位置エネルギーの和）を、位置 $x(t)$ と速度 $\frac{d}{dt}x(t)$ を使い表わせ。

(1-2) (1-1) の運動方程式の一般解を求めよ。ここで、一般解とは、積分定数を最大限もつ解のことである。

(1-3) $t=0$ での位置や速度が、$x(0)=0$、$\dot{x}(0)=B$ とわかった時の解を求めよ。

2.

微分方程式

$$(\frac{d}{dt}+c)v(t)=-g, c>0$$

を満たす $v(t)$ を求めよ。

3.

微分方程式

$$\frac{dX(t)}{dt}=-aX(t)t, a>0$$

を満たす $X(t)$ を求めよ。

解答

（１－１）運動方程式は、

$$M\frac{d^2}{dt^2}x(t)=F=-kx(t) \tag{4.172}$$

である。運動方程式の両辺に $\frac{dx(t)}{dt}$ をかけて、新たな等式

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2}\times\frac{dx(t)}{dt}=-kx(t)\times\frac{dx(t)}{dt} \tag{4.173}$$

が得られる。さらに、両辺はそれぞれ一つの関数の微分の形で、

$$\frac{d}{dt}[\frac{M}{2}(\frac{dx(t)}{dt})^2]=\frac{d}{dt}[-\frac{k}{2}(x(t))^2] \tag{4.174}$$

と表わせる。だから左辺に移項した形に書き換えて、

$$\frac{d}{dt}[\frac{M}{2}(\frac{dx(t)}{dt})^2 + \frac{k}{2}(x(t))^2] = 0 \tag{4.175}$$

となり、運動エネルギーと位置エネルギーの和が、

$$[\frac{M}{2}(\frac{dx(t)}{dt})^2 + \frac{k}{2}(x(t))^2] = E \tag{4.176}$$

時間によって変化しない定数（不変量）となっている。

(1-2) の解法については、以前の問題の解法を参照のこと。

（１－３）$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t, \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ の場合、

$$\begin{aligned} x(0) &= C \\ \dot{x}(0) &= D\omega \end{aligned} \tag{4.177}$$

である。よって、初期条件に代入して、

$$\begin{aligned} x(0) &= C = 0 \\ \dot{x}(0) &= D\omega = B \end{aligned} \tag{4.178}$$

がえられ、係数 C, D が

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ D &= \frac{B}{\omega} \end{aligned} \tag{4.179}$$

と決定される。だから、解は

$$x(t) = \frac{B}{\omega}\sin\omega t \tag{4.180}$$

である。2.

$$(\frac{d}{dt} + c)v(t) = -g, c > 0$$

を満たす $v(t)$ を求める。$g = 0$ の場合（左辺＝０）の解が e^{-ct} であるので、解 $v(t)$ を

$$v(t) = e^{-ct}u(t) \tag{4.181}$$

と仮定してみる。$u(t)$ は未知の関数であり、微分方程式から求める。このため、この両辺を微分して得られる、

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}e^{-ct}u(t) = -ce^{-ct}u(t) + e^{-ct}\frac{d}{dt}u(t) \tag{4.182}$$

をもとの微分方程式

$$(\frac{d}{dt}+c)v(t) = e^{-ct}\frac{d}{dt}u(t) = -g \tag{4.183}$$

に代入して、$u(t)$ が満たす微分方程式が

$$\frac{d}{dt}u(t) = -ge^{ct} \tag{4.184}$$

となる。よって、この両辺を積分して

$$u(t) = -\frac{g}{c}e^{ct} + u_0 \tag{4.185}$$

となり、最終的に $v(t)$ は

$$v(t) = e^{-ct}u(t) = e^{-ct}(-\frac{g}{c}e^{ct} + u_0) = -\frac{g}{c} + u_0e^{-ct} \tag{4.186}$$

となる。この速度は、十分時間が経過した後、

$$lim_{t\to\infty}v(t) = -\frac{g}{c} \tag{4.187}$$

と一定の値となる。

3.

微分方程式

$$\frac{dX(t)}{dt} = -aX(t)t, a > 0$$

を満たす $X(t)$ を求める。

先ず、左辺に $X(t)$ の関数と微分、右辺に t の関数と微分がくるように書き換えて、

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = -atdt \tag{4.188}$$

が得られる。この両辺をそれぞれの変数で積分して

$$\log X(t) = \frac{-at^2}{2} + C_0 \tag{4.189}$$

となり、さらに

$$X(t) = \exp\frac{-at^2}{2} + C_0 = X_0\exp\frac{-at^2}{2} \tag{4.190}$$

となる。ここで、$X_0 = e^{C_0}$ とした。

ニュートンのプリンキピア

ニュートンは、プリンキピア（　）で力学を、運動の３法則を中心として体系化した。この際、微分を導入し、様々な計算を行った。このため、ニュートンは微分の発見者であるともいわれる。

ニュートンが体系化した運動の法則は、ほぼそのままの形で今でも使われている。実際、現在のほぼすべての力学の教科書は、プリンキピアと同じに、運動の３法則を中心にまとめられている。これは、驚異的なことである。しかしながら、運動の３法則の表現の仕方は、力や質量の概念が、現在のものと完全に同じであるわけではない。特に、質量の概念は、、プリンキピアでは現在のものほど、明確ではない。また、我々が使う微分記号 $\frac{d}{dx}$ は、プリンキピアには現れないで、微分の考えは絵や図で表現される。

ニュートンの運動の３法則は、プリンキピアで次のように述べられる。

第１法則：

すべての静止している物体または一定の速さで運動している物体は、力によってその状態が変わるように強制されないならば、その状態を保持する。

第２法則：

物体の運動の変化は、物体に加えられた力に比例して、その力の方向に向く。

第３法則：

どんな作用にも、それに逆向きで同じ大きさの反作用があり、二つの物体の間の作用と反作用は、必ず同じ大きさで逆向きである。

プリンキピアの全体像を知ることは、有意義なことであろう。

第5章　仕事とエネルギー

運動する物体は、運動エネルギーを持っている。運動エネルギーは、質量と速度で決まり、物体に外部から力が加わると増減する。運動エネルギーの増減量は、力が物体にする仕事に一致する。このように、エネルギーを使う事により、運動の特徴が明らかになる。

5.1　運動量と力積

質量と速度の積を運動量 $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{5.1}$$

と呼ぶ。運動方程式は、運動量の微分が力に一致する

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \tag{5.2}$$

となる。この運動方程式は質量を含まない。だから、質量には無関係な式として表わされている。この式は、質量が変化するような場合の運動を調べるのに適している。

運動方程式を時間で積分して

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} dt\vec{F} \tag{5.3}$$

$$\vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\vec{F} \tag{5.4}$$

が得られる。力を時間で積分した右辺を力積という。運動方程式は、”運動量の変化が力積である ”ともいえる。

5.2　仕事

力学における仕事は、普遍的な意味をもつ物理量である。仕事は、力ベクトルを使う積分の形で定義される。この結果、力学における仕事はどんな場合にも同じ物理的な意味を持つ。力学における仕事は、日常の生活における仕事の使い方と似ているが、全く同じであるわけ

ではない。日常生活で使われる時、仕事は、必ずしも普遍的な意味を持っているわけではなく、意味が状況により変わることがあり、また使う人により異なることもある。ところが、物理学における概念は、きっちりとした普遍的な意味を持ち、物理概念としての仕事は、このように普遍的な意味を持っている。この点は、非常に重要な点である。普遍的な意味を持っていない量は、物理量とはなれない。普遍的な意味を持つ量が物理量となっている。（普遍的な意味をもつように定義される）

力 $\vec{F}$ が加わって物体が微少変位 $\Delta\vec{x}$ したとき、力は物体に、微少な仕事

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x} \tag{5.5}$$

をしたといい、物体はこの仕事をされたという。この定義では、以前にきっちりと定義された力と変位が使われる。力を、きっちりと定義するのには、物体の運動法則が使われる。だから、仕事は、物体に働く力と切り放せない概念である。仕事をされた物体が、どのように運動を変えるかを次に調べよう。

5.2.1 仕事と運動エネルギーの変化

物体がある運動をしているとき、力が加わった場合、運動は変わる。このとき、力により運動がどのように変わるかを示すのに、仕事が使われる。

質量 m、速度 $\vec{v}$ の物体に、一定の力 $\vec{F}$ が加わったとする。この時、物体に加わった力のため、物体は加速度を変える。簡単のために、速度と力が同じ方向を向いている場合を考える。この方向での運動は、１次元の加速度と力の間の運動方程式

$$m\frac{d}{dt}v = F \tag{5.6}$$

となる。両辺を積分してこの方程式を解くのは、簡単である。両辺を積分して

$$v = \frac{F}{m}t + v_0 \tag{5.7}$$

$$x = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0 \tag{5.8}$$

が得られる。ここで、v_0, x_0 は初期速度と初期位置であり、微分方程式を解く際の、積分定数である。積分定数は、微分方程式には含まれない。しかし、ひと組の値が決まると、解が一つ決まる。すると、時刻 t_1 と時刻 t_2 における速度の差は、

$$v(t_2) - v(t_1) = \frac{F}{m}(t_2 - t_1) \tag{5.9}$$

である。またこの際に力がする仕事は、

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int F\frac{dx}{dt}dt = F(x_2 - x_1) \tag{5.10}$$

と計算される。この仕事は、一方で運動方程式を使い積分変数を t に変換して、

$$
\begin{aligned}
W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int F v dt \qquad (5.11)\\
= \int dt (mv \frac{d}{dt} v) \qquad (5.12)\\
= \int dt \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} v^2 \qquad (5.13)\\
= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

と表せる。だから、運動エネルギーの変化量は、物体になされた仕事に一致し、

$$
\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + W \qquad (5.15)
$$

となる。つまり、運動エネルギーを持つ物体に、外部から力により仕事がされると、運動エネルギーは仕事の量だけ変化する。この関係式は、力の大きさに依らず、また速度の大きさにもよらないことに注意しよう。

例えば、$v_1 = 0$ と初速が零であるとしてみよう。すると、物体になされた仕事が、運動エネルギーに一致して

$$
\frac{1}{2} m v_2^2 = W \qquad (5.16)
$$

が成立する。仕事と、運動エネルギーの間のこの関係式は、どんな力の場合にも成立している。

5.3 保存力と位置エネルギー

力が物体に行なう仕事は、力の性質を反映する。この事から、仕事を考察して力の性質を調べ、力を分類することができる。

力が働いている物体が一つの経路に沿って運動したとしよう。これらは、一般には異なる方向を向いている。そこで、力のベクトルの経路方向の成分をたした線積分

$$
W = \int \vec{dr} \cdot \vec{F} \qquad (5.17)
$$

が仕事である。この右辺の力を運動方程式から求まる加速度で表わして

$$
\begin{aligned}
W = \int \vec{dr} \cdot \vec{F} \qquad (5.18)\\
= \int \vec{dr} \cdot m \frac{d}{dt} \vec{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dt \frac{d}{dt}\vec{r} \cdot m \frac{d}{dt}\vec{v} \\
&= \int dt \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\
&= \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})|_{t_1}^{t_2} \\
&= \frac{1}{2} m (\vec{v}_2)^2 - \frac{1}{2} m (\vec{v}_1)^2
\end{aligned}
$$

が得られる。上の式変形で、

$$\vec{dr} = \frac{\vec{dr}}{dt} dt = \vec{v} dt \tag{5.19}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r} \cdot m \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{v} \cdot \vec{v} \tag{5.20}$$

を使った。このように、物体になされた仕事は、その物体の運動エネルギーの増加になる。三次元では、運動エネルギーは速度ベクトルの二乗であり、仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積である。これらの関係式が求まったが、この結果は、一次元と同じである。

ある経路に沿って力がする仕事は、力の性質を反映している。その経路に沿ってする仕事が、経路によらない一定の値をとって、積分の上限と下限だけによる場合と、経路に依って変化する場合がある。前者の力を保存力とよび、運動は比較的簡単になる。一方、後者の力を非保存力とよび、運動は保存力の場合よりも複雑である。

つまり、

保存力：仕事 (5.17) が積分経路によらない。

非保存力：仕事 (5.17) が積分経路に依存する。

実は、多くの力は保存力である。

具体的な計算で、仕事を計算する。

重力：

$$F = m\vec{n}_z g = -mg(0, 0, 1) \tag{5.21}$$

のする仕事。

（1）x 軸方向 h、y 軸方向 h, z 軸方向 h （2）(1,1,1) 方向 h

仕事は、始点と終点の位置だけで決まる。だから、位置で決まるエネルギーである、位置エネルギーを使い運動が表せる。

保存力がする仕事は、始点と終点の位置だけで決まり、また当然ながら物体の運動エネルギーの増減に等しい。

5.3.1 偏微分と多変数積分

ここで、複数の変数の関数の微分や積分についてまとめておこう。一変数の関数の微分や積分を拡張して複数の変数の場合の微分や積分が得られる。

一変数関数 $f(x)$ の場合は、微分は $x = x$ における接線の傾きであり、積分は面積を表わすと共に、微分の逆であり、

$$F(x) = \int_a^x dx' f(x') \tag{5.22}$$

とすると

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \tag{5.23}$$

を満たしている。

変数が一つ以上ある場合には、複数の微分や積分が定義され、使われる。2 変数 x, y の関数 $f(x, y)$ の場合でまず考察する。

x についての一階微分は

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f_x(x,y) \tag{5.24}$$

であり、他の変数 y には全く触れないで、x についての傾きである微分に対応している。同様に y についての微分は

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = f_y(x,y) \tag{5.25}$$

であり、他の変数 x には全く触れないで、y についての傾きである微分に対応している。関数 $f(x, y)$ の偏微分の表記を簡単に $f_x(x, y), f_y(x, y)$ とすることもある。2 階微分は、2 変数の組み合わせから、4 種類

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y) \tag{5.26}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y) \tag{5.27}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y) \tag{5.28}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y) \tag{5.29}$$

あるが、微分の定義に戻ると、

$$
\begin{aligned}
f_{xy}(x,y) &= \lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{\frac{f(x+h_2,y+h_1)-f(x+h_2,y)}{h_1}-\frac{f(x,y+h_1)-f(x,y)}{h_1}}{h_2} \\
&= \lim_{h_1\to 0}\lim_{h_2\to 0}\frac{f(x+h_2,y+h_1)-f(x+h_2,y)-f(x,y+h_1)+f(x,y)}{h_1h_2} \qquad (5.30)\\
f_{yx}(x,y) &= \lim_{h_2\to 0}\lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{f(x+h_2,y+h_1)-f(x,y+h_1)}{h_2}-\frac{f(x+h_2,y)-f(x,y)}{h_2}}{h_1} \\
&= \lim_{h_2\to 0}\lim_{h_1\to 0}\frac{f(x+h_2,y+h_1)-f(x+h_2,y)-f(x,y+h_1)+f(x,y)}{h_1h_2} \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

となり、２重極限の値が極限をとる順序によらないことから、

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \tag{5.32}$$

となることが容易に分かる。これは、ほとんど自明な関係式であるが、重要である。

積分は微分の逆であるので、変数 x での積分や、変数 y での積分があり、それぞれの偏微分と関連して、

$$\int_a^b dx\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = f(b,y)-f(a,y) \tag{5.33}$$

$$\int_c^d dx\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = f(x,d)-f(x,c) \tag{5.34}$$

となる。また、２変数での積分については、

$$\int_a^b dxdy\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \int dy(f(b,y)-f(a,y)) \tag{5.35}$$

$$\int_c^d dydx\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \int dx(f(x,d)-f(x,c)) \tag{5.36}$$

となっている。

ここで、両変数が入り組んだ積分

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)) \tag{5.37}$$

と

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} dx\int_{y_1}^{y_2} dy(\frac{\partial}{\partial x}V_y(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}V_x(x,y)) \tag{5.38}$$

を考察しよう。I_1 は、簡単に積分出来て、

$$I_1 = f(x_2,y_2)-f(x_2,y_1)-f(x_1,y_2)+f(x_1,y_1) \tag{5.39}$$

となることが分かる。

I_2 は、

$$I_2 = \int_{y_1}^{y_2} dy(V_y(x_2, y) - V_y(x_1, y)) - \int_{x_1}^{x_2} dx(V_x(x, y_2) - V_x(x, y_1)) \tag{5.40}$$

となる。この積分は、順序を入れ替えて

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x_1}^{x_2} dxV_x(x, y_1) + \int_{y_1}^{y_2} dyV_y(x_2, y) - \int_{x_1}^{x_2} dxV_x(x, y_2) - \int_{y_1}^{y_2} dyV_y(x_1, y) \qquad (5.41) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dxV_x(x, y_1) + \int_{y_1}^{y_2} dyV_y(x_2, y) + \int_{x_2}^{x_1} dxV_x(x, y_2) + \int_{y_2}^{y_1} dyV_y(x_1, y) \end{aligned}$$

と書き表して、

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{V} \tag{5.42}$$

となる閉経路に沿って一周する線積分であることが分かる。面積分 I_2 が、線積分 (5.42) に一致する恒等式は、ストークスの定理である。

さて、座標の関数であるベクトル $\vec{V}(x, y)$ が

$$(\frac{\partial}{\partial x} V_y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} V_x(x, y)) = 0 \tag{5.43}$$

であるとき、閉経路積分は零になり

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{V} = 0 \tag{5.44}$$

また、閉経路を 2 分割した経路 C_1, C_2 に沿う二つの線積分となり、

$$\int_{C_1} d\vec{l} \cdot \vec{V} = \int_{C_2} d\vec{l} \cdot \vec{V} \tag{5.45}$$

は等しくなる。ベクトル $\vec{V}$ として力のベクトル $\vec{F}$ とすると、この線積分は経路 C_i に沿う仕事である。

条件 (5.43) を満たす保存力は、２次元空間では一つの関数 $U(x,y)$ から、

$$\vec{F} = -(\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}) \tag{5.46}$$

と表わせる。保存力ベクトルの成分は、一つの関数から表わされる。

5.4　力学的エネルギーの保存

力が保存力である時、３次元空間では、力のベクトルはある関数 $U(x,y,z)$ の偏微分で

$$\vec{F} = -(\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z)), \frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)) \tag{5.47}$$

と書かれる。この力がある経路 C に沿って動く質点にする仕事は、

$$W = \int_{P_1}^{P_2} d\vec{l} \cdot \vec{F} = -\int_{P_1}^{P_2} (dx\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) + dy\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) + dz\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)) \tag{5.48}$$
$$= -(U(P_1) - U(P_2))$$

となり、積分の上限の位置と下限の位置における $U(x,y,z)$ の値で決定され途中の経路に依存しない。逆に、力がする仕事から $U(x,y,z)$ が求められる。

質点の位置を時間の関数 $\vec{x}(t)$ とすると、力が質点にする仕事は時間についての積分、

$$\begin{aligned} W &= -\int_{P_1}^{P_2} dt(\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z) + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)) \\ &= -\int dt\frac{d}{dt}U(x(t),y(t),z(t)) = -(U(P_1) - U(P_2)) \end{aligned} \tag{5.49}$$

となり、上の結果が簡単に導ける。以上のように、保存力がする仕事は、物体に与える位置で決まるエネルギーとなり、その結果、物体がその位置にあるため持っているエネルギーである。だから、U をポテンシャルと呼びまた、このエネルギーを位置エネルギーという。

次に、運動方程式、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \vec{F} \tag{5.50}$$

の両辺に速度をかける。すると

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{F}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \tag{5.51}$$

が得られる。ここで、右辺の力をポテンシャル $U(\vec{x})$ で表わして、

$$\int_{t_1}^{t_2} dtm\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt(-)\frac{d}{dt}U(\vec{x}(t)) \tag{5.52}$$

となる。さらに被積分関数を書き換えて

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}(\frac{m}{2}(\frac{d}{dt}\vec{x}(t))^2 + U(\vec{x}(t))) = 0 \tag{5.53}$$

となり、結局運動エネルギーと位置エネルギーの和が時間によらずに一定であることを示す

$$\frac{m}{2}(\frac{d}{dt}\vec{x}(t))^2 + U(\vec{x}(t))|_{t=t_1} - \frac{m}{2}(\frac{d}{dt}\vec{x}(t))^2 + U(\vec{x}(t))|_{t=t_2} = 0 \tag{5.54}$$

が得られる。つまり、力が保存力であるときは、必ず力学的エネルギーが時間によらず一定に保たれる。エネルギーを E とすると、**エネルギー保存則**、

$$E = \frac{m}{2}(\frac{d}{dt}\vec{x}(t))^2 + U(\vec{x}(t)) \tag{5.55}$$

が成立する。エネルギーは、ひと組の初期条件で、値が一つ決まる。つまり、積分定数とみなせる。

エネルギー保存則は、また位置ベクトルについての一つの一階微分方程式とみなせる。この方程式から、変数が一つである一次元空間では、運動が完全に決まってしまう。単振動の運動方程式を解くにあたり、４章でエネルギー保存則を応用した。二次元以上の高次元空間では、変数の数が方程式の数よりも多いので、エネルギーの式だけから、運動を決めることは出来ない。しかし、高次元の場合でも、エネルギー以外に別の保存量があれば、この保存量とエネルギーを併用して２階の運動方程式を一階の方程式に帰着して解くことが出来る。

5.4.1 保存力の例

(**例１　一様な重力**)

ポテンシャルが、一変数 z に依存する

$$U = mgz \tag{5.56}$$

では、力はｚ軸方向を向いた

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) \tag{5.57}$$

である。これは、z 方向の一様な力である。

（例２　３次元球対称バネ）

３方向に同じバネ定数を持つ３次元対称バネでは、

$$U = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k}{2}r^2 \tag{5.58}$$

であり、力は、

$$\vec{F} = -k(x, y, z) \tag{5.59}$$

と中心方向を向いた原点からの距離に比例した大きさである。

（例３　万有引力）

原点からの距離に反比例するポテンシャル

$$U = -\frac{1}{r} \tag{5.60}$$

では、力は

$$\vec{F} = -\frac{1}{r^3}(x, y, z) \tag{5.61}$$

と中心方向と距離の二乗に反比例する大きさを持つ。

5.5　エネルギー保存則の応用

ニュートンの運動方程式は、位置ベクトルの時間についての２階微分を力で決める式である。これは、力が座標の関数として与えられた場合、位置についての２階の微分方程式である。２階の微分方程式は、一階の微分方程式よりもはるかに解法が難しい。ところが、エネルギーは、位置の一階微分だけを含み、２階微分を含まない。このため、エネルギー保存則は、一階の微分方程式とみなせる。エネルギー保存則を使い、一階の微分方程式を解く事により、運動の解を求める事ができる。

5.5.1　単振子

単振子の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) = -\frac{d}{dx}\frac{kx^2}{2} \tag{5.62}$$

である。先ず、保存するエネルギーを求める。このため、両辺に $\frac{d}{dt}x(t)$ をかけて、

$$m\frac{d}{dt}x(t)\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{d}{dt}x(t)\frac{d}{dx}\frac{kx^2}{2} \tag{5.63}$$

を得る。両辺が共に微分で

$$\frac{d}{dt}\frac{m}{2}(\frac{d}{dt}x(t))^2 = -\frac{d}{dt}(\frac{k}{2}x^2) \tag{5.64}$$

と書かれるので、簡単に積分できる。エネルギー E を定数として、

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2}(x(t))^2 \tag{5.65}$$

は時間に依存しない定数である。エネルギーが一定であるので、式 (5.65) を速度について解いた式は、一階微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \pm(\frac{2}{m})^{1/2}(E - \frac{k}{2}x^2)^{1/2} \tag{5.66}$$

となっている。

運動エネルギーは正符号であるので、

$$E - \frac{k}{2}(x(t))^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 \geq 0 \tag{5.67}$$

となり、**x** はポテンシャルの値がエネルギーの値より小さい領域に限られる。いま

$$E - \frac{k}{2}x^2 = 0 \tag{5.68}$$

の解は

$$x_{\pm}^{(0)} = \pm x^0 \tag{5.69}$$

$$x_0 = (\frac{2E}{k})^{1/2} \tag{5.70}$$

であるので、運動は

$$x_{-}^{0} \leq x \leq x_{+}^{0} \tag{5.71}$$

の領域に限られる。

エネルギーの式から運動を解くことにしよう。いま、方程式を

$$\frac{dt}{dx} = (\frac{m}{k})^{1/2}\frac{1}{(\frac{2E}{k} - x^2)^{1/2}} \tag{5.72}$$

と書き直した後、両辺を x で積分する。左辺の不定積分は t であり、右辺の不定積分は逆三角関数であり、

$$t - t_0 = (\frac{m}{k})^{1/2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{x^0}\right) \tag{5.73}$$

となる。ここで、t_0 は初期条件を与える時刻であり、x^0 は振幅である。よって、時間の関数としての位置は

$$x = x_0 \sin\left(\omega(t - t_0)\right) \tag{5.74}$$

$$\omega = (\frac{k}{m})^{1/2} \tag{5.75}$$

図

で与えられる。これは、角速度 ω、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$、振動数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ で振幅を x_0 とする時間振動する三角関数である。角速度は、角度の時間変化の大きさを示す変化率であり、周期は運動が基にもどる最短時間であり、振動数は、単位時間あたりの振動の回数である。

5.5.2 万有引力による惑星の運動

後で議論するように、万有引力中での運動では、エネルギーも角運動量も初期条件で決まり時間で変化しない定数であり、また角運動量も同じ性質をもつため、

$$E = m/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) \tag{5.76}$$

$$M_z = mr^2\dot{\phi} \tag{5.77}$$

で、E と M_z は定数である。第 2 式の面積速度（角速度）が一定であることを示す式から $\dot{\phi}$ を r の関数としてもとめ、エネルギーに代入して、r と $\dot{r}$ であらわされたエネルギーの表式

$$E = m/2(\dot{r}^2 + r^2\frac{M_z}{mr^2}^2) + U(r) \tag{5.78}$$

が求められる。次にこれを、$\frac{dr}{dt}$ について解いて、

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2r^2}} \tag{5.79}$$

が得られる。

上の両辺を t で積分するのは、右辺の r の t 依存性が未知であるので、不可能である。しかし、これの逆数は、

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} \tag{5.80}$$

となるので、両辺を r で積分出来る。両辺を積分して

$$t = \int dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} \tag{5.81}$$

となる。またもう一度面積速度（角速度）一定の式を使い、$\frac{dr}{dt}$ と $\frac{d\phi}{dt}$ の比から

$$\frac{d}{dr}\phi = \frac{M_z}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} \tag{5.82}$$

が得られる。これを積分して、

$$\phi = \int dr \frac{M_z}{r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2}}} \tag{5.83}$$

となる。万有引力では、

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{5.84}$$

となり、変数変換 $\rho = \frac{1}{r}$ の後、上の積分を実行して

$$\phi = \cos^{-1} \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_z^2}}} \tag{5.85}$$

が得られる。

5.6 積分公式

本書で使う少し難しい積分公式のいくつかを、ここでまとめておこう。

例１

$$\int dx \log x = x \log x - x \tag{5.86}$$

右辺の微分を計算すると、実際左辺が出てくる。

例 2 上の単振動の問題で使った積分が、

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) \tag{5.87}$$

である。これを、導いておこう。積分変数を x から ξ に

$$\begin{aligned} x &= a\cos\xi & (5.88) \\ dx &= -a\sin\xi d\xi \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= -a\sin\xi & (5.89) \end{aligned}$$

と変換する。すると、求める積分は、

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\xi = \xi = \cos^{-1}(\frac{x}{a}) \tag{5.90}$$

と求まる。

例 3 ケプラー問題で使う積分公式が以下のものである。

$$\begin{aligned} I_F &= \int dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} & (5.91) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log|2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + x)}|, a > 0 \\ \text{または、} &= -\frac{1}{\sqrt{a}} \log|2ax + b - 2\sqrt{a(ax^2 + bx + x)}|, a > 0 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a}} \sin^{-1}\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, a < 0 \end{aligned}$$

右辺の微分を計算する。

$$\int dx\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b^2 - 4ac}{8a} I_F \tag{5.92}$$

5.7 さまざまな力

いかなる力が、自然界に存在するだろうか？物体の運動の原因となる力には、２種類ある。物体の近傍の媒質によって引き起こされる力と、物体間の媒質には依存しない基本的な力がある。

5.7.1 第１の力：物質を通して物質の効果として働く力：摩擦力と垂直抗力

垂直抗力：

二つの物体（主に固体）が接触している時、接触面を通して面に垂直に相手の物体に作用する力である。この力の起源は、

固体が、沢山の分子や原子の集まりから構成され、非常に安定な形を保っていることからきている。このため、固体は、外力が働いたとき、かたちを変えない。形を変えようとすると、それに逆らう力が働く。これが、抗力である。

床の上に物体を置いたとき、物体は動かない。物体には、重力が働いているが、重力以外に机から垂直抗力が働くからである。垂直抗力の大きさは、重力と同じ大きさであり、方向は逆である。そのため、二つの力が、釣り合って、合力はゼロである。つまり、力が働かないのと等価である。

摩擦力：

静止摩擦力は、2 物体の速度が一致して、相対的に動いていない場合に働く摩擦力である。床の上に静止している物体に、面に平行の小さな外力を加えても、物体は静止したままである。このとき、外力に逆らって静止摩擦力が働いている。その力の大きさは、外力と同じであり向きは外力と反対向きである。そのため、外力と摩擦力の和は、零となる。だから、物体は運動しない。外力を徐々に大きくして、ある臨界値を越えると、物体は動き始める。これより、摩擦力には上限値があることがわかる。この上限の摩擦力のことを最大静止摩擦力という。最大静止摩擦力については、経験的に垂直抗力に比例し

$$F_{\text{最大摩擦力}} = \mu N \tag{5.93}$$

$$\mu = \text{静止摩擦係数} \tag{5.94}$$

となることが分かっている。これを、クーロンアモントンの法則という。

物体が運動している時の摩擦力は、

$$F_{\text{運動摩擦力}} = \mu' N \tag{5.95}$$

$$\mu' = \text{動摩擦係数} \tag{5.96}$$

となり、動摩擦係数は静止摩擦係数より小さい。

表

摩擦力は、各種の機械で重要な働きをしている。たとえば、自動車や自転車と地面との間には、摩擦力が働く。この摩擦力は、自動車の駆動力になると共に、抵抗にもなっている。もしも、タイヤと地面の間に摩擦がないならば、タイヤはカラすべりしてしまい、駆動力は得られない。

一方、ブレーキをかけて車を停止させるのも、摩擦力である。

弾性力

固体のばねは、ある固有の長さをもっていて、この長さより伸びると縮む力が働き、逆にこの長さより縮むと、伸びる力が働く。この力を弾性力といい、固体が弾性を示すのは、固体が内部構造をもちその性質から決まった大きさをもつからである。決まった大きさからずれた時、変形を元に戻す力が弾性力である。ただし、弾性力は、物体の変位が小さい時に限られる。変位が大きい時には、物体は元の形に戻らず、このとき働く力は弾性力ではない。

5.7.2　第２の力：万有引力と電磁気力

太陽と惑星の間や、地球と月の間には万有引力が働いている。万有引力は、すべての質量を持つ物体の間に働いている。では、万有引力を働かせる媒質があるだろうか？例えば、太陽と惑星の間には万有引力を働かせる物質か、媒質があるだろうか？実は何もない、ほぼ真空である。真空が、万有引力の性質を持っている。基本的な力は、媒質なしに働く力である。

同様に、電磁気力も、電荷をもつ物体間に働く基本的な力であり、電荷間になにも物質がなくて働く。電磁気力も、真空中で働く基本的な力である。いかなる基本的な力が自然界にあるのかを、知っておくことは、自然を理解する上で大切である。

5.8　問題

5.8.1　保存力のする仕事

z 軸下向きの重力が働いて放物運動している質量 M の物体について、重力のする仕事が実際に物体の運動エネルギーの増加になっていることを計算に基づいて確認せよ。

解

運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -mg \tag{5.97}$$

であり、両辺をｔで積分して速度が

$$\frac{d}{dt}z(t) = -gt + v_0 \tag{5.98}$$

と得られ、もう一回積分して、位置が

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + z_0 \tag{5.99}$$

と得られる。

次に z_1 から z_2 までの間に重力がする仕事は、

$$W = \int_{z_1}^{z_2} F \cdot dz = -mg(z_2 - z_1) \tag{5.100}$$

であり、上の式を代入して位置 z_1 及び z_2 に対応する時刻 t_1 と t_2 を使い

$$W = -mg(z_2 - z_1) = \frac{m}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2) - mgv_0(t_2 - t_1) \tag{5.101}$$

となる。一方で、運動エネルギーの差は、

$$T = \frac{m}{2}((-gt_2 - v_0)^2 - (-gt_1 + v_0)^2) \tag{5.102}$$

$$= \frac{m}{2}g^2(t_2^2 - t_1^2) - mgv_0(t_2 - t_1) \tag{5.103}$$

となり、実際、力のする仕事に一致する。なお、x、y方向には力が働かないので、仕事はゼロであり、この方向の運動エネルギーは、一定のままである。だから、運動エネルギーの変化と仕事は、z方向での値の式 (5.101) と式 (5.103) である。

5.8.2 保存力と非保存力

上の問題と同じ状況で、重力に加えて速さに比例する大きさをもつ抵抗の力が働く場合、運動エネルギーの増加と重力のする仕事の関係を求めよ。

解

速度に比例する抵抗の力が働いているとき、運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = -g - c\frac{d}{dt}z(t) \tag{5.104}$$

であり、運動方程式を速度で

$$\frac{d}{dt}\tilde{v} = -c\tilde{v}, \tilde{v} = v + \frac{g}{c} \tag{5.105}$$

と書きなおす。運動方程式の解が、

$$v(t) = v_0 + \hat{v}_0 e^{-ct}, v_0 = -\frac{g}{c} \tag{5.106}$$

$$z = -\frac{g}{c}t - \frac{\tilde{v}_0}{c}e^{-ct} + z_0 \tag{5.107}$$

と求められる。ここで、$\tilde{v}_0$ は積分定数である。運動方程式 (5.104) の右辺の第 2 項は、保存力ではない。

次にエネルギーの変化を調べる。そのため、運動方程式の両辺に速度 $\frac{d}{dt}z(t)$ をかけて

$$\frac{d}{dt}z(t)\frac{d^2}{dt^2}z(t) + g\frac{d}{dt}z(t) = -c(\frac{d}{dt}z(t))^2 \tag{5.108}$$

が得られ、さらに書き直して運動エネルギーと位置エネルギーの和の時間変化が

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\frac{d}{dt}z(t))^2 + gz(t)) = -c(\frac{d}{dt}z(t))^2 \tag{5.109}$$

と抵抗の力の強さを示す定数 c に依存して与えられる。

$c = 0$ で抵抗がない時は、右辺がゼロとなり、力学的エネルギーは保存する。この保存系の状況は、前の章で調べた。

しかし抵抗があるとき、力学的エネルギーは、時間とともに減少する。抵抗の力は保存力ではないので、この系は、保存するエネルギーを持たない。ここで、抵抗は運動を妨げる方向、すなわち運動の方向とは逆向きに働くことに注意しよう。このため、必ず $c > 0$ である。c が大きいほど、失うエネルギーは大きくなる。力学的エネルギーに、上の解を代入して

$$\frac{1}{2}v^2 + gz = \frac{g^2}{2c^2} + g(z_0 - \frac{g}{c}t) - 2\frac{g}{c}\tilde{v}_0e^{-ct} + \frac{1}{2}\tilde{v}_0^2e^{-2ct} \tag{5.110}$$

となり、また

$$cv^2 = (\frac{g^2}{c} - 2\hat{v}_0ge^{-ct} + c\hat{v}_0^2e^{-2ct}) \tag{5.111}$$

となり、それぞれの時間変化が、

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(\frac{d}{dt}z(t))^2 + gz(t)) = -\frac{g^2}{c} + 2g\tilde{v}_0e^{-ct} - c\tilde{v}_0^2e^{-2ct} \tag{5.112}$$

$$-c(\frac{d}{dt}z(t))^2 = -\frac{g^2}{c} + 2g\tilde{v}_0e^{-ct} - c\tilde{v}_0^2e^{-2ct} \tag{5.113}$$

となり、上の式 (5.109) が成立していることがわかる。

力学的エネルギーの時間変化は、t が大きくなると

$$\frac{d}{dt}E_{力学} = -\frac{g^2}{c} \tag{5.114}$$

と負定値の値をとる図のように与えられる。

このように、力学的エネルギーが保存しないのは、抵抗の力が働くからである。力学的エネルギーの変化率は (5.109) より与えられる。この式を時間で積分して、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} E_{力学} = -\int_{t_1}^{t_2} dtcv(t)^2 \tag{5.115}$$

$$E_{力学}(t_2) - E_{力学}(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} dtcv(t)^2 \tag{5.116}$$

となる。よって、抵抗の力が運動方向と逆向きに働いて物体に負の仕事をした結果力学的エネルギーが減少して、

$$E_{力学}(t_1) - E_{力学}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dtcv(t)^2 \tag{5.117}$$

となる。速度 $v(t)$ を代入して右辺の計算を行うと、

$$\int_{t_1}^{t_2} dtcv(t)^2 = \frac{g^2}{c}(t_2 - t_1) + \frac{2v_0 g}{c}(e^{-ct_2} - e^{-ct_1}) - \frac{v_0^2}{2}(e^{-2ct_2} - e^{-2ct_1}) \tag{5.118}$$

となる。右辺は、位置座標 $z(t_1)$ と $z(t_2)$ だけで書けない。

このように物体の力学的エネルギーは、抵抗が働かない時には保存するが、抵抗が働くと抵抗のために減少する。ではこのエネルギーはどこに行ってしまうのだろうか？この問題は、抵抗の力の起源に遡れば理解できる。空気は、もともと沢山の空気の分子の集まりである。空気中の物体は、これらの分子と小さな確率で衝突し、運動の第３法則の作用·反作用から、物体は空気の分子に力を及ぼし、分子を力の方向に移動させてエネルギーをあげる。その結果、自らのエネルギーを失う。つまり、物体のエネルギーは、空気中にある沢山の空気分子に移動する。この結果、空気の温度は上昇することになる。物体が、重力から受け取る重力エネルギーが、気体分子にあげるエネルギーよりも大きい時は、物体は加速され、両エネルギーが等しい時は、物体は加速されず等速度運動を行う。時間が十分経過した後、等速度運動になっているとき、両エネルギーは等しくなっている。

5.8.3 １次元ポテンシャル問題

ポテンシャル $V(x)$ の下で運動している質量 M の質点がエネルギー E をもつ場合の位置 $x(t)$ の満たす１次元方程式を求めよ。$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cx^4$ の場合、方程式の解を求めよ。

5.8.4 ２次元中心力問題

万有引力による質点の２次元運動で、角速度 M_z が零である運動の解を求めよ。

5.8.5　仕事の計算

重力中で、質量 M の物体をゆっくり経路 C_i に沿って原点 O$(0,0,0)$ から点 P $(10,10,10)$ まで移動させる際の仕事を計算せよ。

C_1:OP を結ぶ直線
C_2：$(0,0,0)\rightarrow(10,0,0)\rightarrow(10,10,0)\rightarrow(10,10,10)$
C_3：$(0,0,0)\rightarrow(20,0,0)\rightarrow(20,10,0)\rightarrow(20,10,10)\rightarrow(10,10,10)$
C_4：$(0,0,0)\rightarrow(0,10,0)\rightarrow(10,10,0)\rightarrow(10,10,10)$

5.8.6　保存力

力 $\vec{F}$ が、一つの関数の勾配として

$$\vec{F}=-\nabla U \tag{5.119}$$

と表せるとき、保存力である。次の力は、保存力か？
１．$\vec{F}=(0,0,-mg)$
2.$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\vec{r}$
3.$\vec{F}=-k\vec{x}$

5.8.7　勾配

ポテンシャルの勾配

$$\vec{F}=-\nabla U(\vec{r}) \tag{5.120}$$

と書かれる力は、保存力である。ここで、保存力の発散

$$\nabla\cdot\vec{F}(-)\nabla^2U(\vec{r}) \tag{5.121}$$

と回転

$$\nabla\times\vec{F}(-)\nabla^2U(\vec{r}) \tag{5.122}$$

を求めよ。

5.8.8 抵抗の力

　速度に比例し、速度と逆方向を向いた力

$$\vec{F} = -k\vec{V} \tag{5.123}$$

は、

$$\vec{F} = -\nabla U \tag{5.124}$$

とは書くことができないことを示せ。また、

第6章　中心力による運動

中心力は、力の方向がいつも中心方向を向いている。だから、中心方向と直交する方向には力が働かない。だからこの方向の運動は、速さが変化しない。このため、中心力によって引き起こされる運動は、いくつかの特徴的な性質を満たしている。これらは、運動方程式を解析して導かれる。

6.1　角運動量の保存

二次元面内の質点の運動を考察しよう。

位置は、２成分を持つベクトルであるので、力を $\vec{F}$ とする運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \vec{F} \tag{6.1}$$

である。いま、力のベクトルが、位置ベクトル $\vec{r}$ に比例する方向と、原点からの距離 r の関数に比例する大きさを持つ、

$$\vec{F} = \vec{r}f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.2}$$

である時、如何なる運動が実現するだろうか？この力は、ベクトルの動径方向の成分は値をもつが、接線方向の成分はゼロであり、いつも動径方向にむいた中心力である。

接線方向には、力が働かないので、接線方向の運動量は保存する。接線方向の運動量は、位置ベクトルと運動量ベクトルのベクトル積である角運動量ベクトル

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{6.3}$$

である。角運動量の時間変化は、時間微分

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} \tag{6.4}$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p} \tag{6.5}$$

で与えられる。ここで、運動量の定義を使い位置の時間微分を運動量であらわし、また運動方程式を使い運動量の微分を力で表わす

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{1}{m}\vec{p}, \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \tag{6.6}$$

を代入する。さらに、中心力である力のベクトル関係式

$$\vec{F} = f\vec{r} \tag{6.7}$$

を代入して、角運動量の時間変化が

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{p} + f\vec{r} \times \vec{r} = 0 \tag{6.8}$$

と零になる。だから、角運動量ベクトルは時間と共に変化しない保存量である。ある時刻で、位置や速度を決定すると、角運動量ベクトルも決まり、それ以降の時刻で、位置や速度は異なるベクトルになるが、角運動量は変わらず、いつも同ベクトルに保たれる。

３次元空間における中心力では、３次元ベクトルである角運動量

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \tag{6.9}$$

$$L_x = yp_z - zp_y, L_y = zp_x - xp_z, Lz = xp_y - yp_x \tag{6.10}$$

が保存して

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \tag{6.11}$$

である。保存する角運動量ベクトルの方向を z 軸に選ぶと、角運動量が位置ベクトルと運動量ベクトルのベクトル積であることより、これらのベクトルは xy 面内にある。だから運動は xy 面内の２次元運動である。このような３次元運動は、２次元の運動としてあらせる。

6.1.1　面積速度

角運動量ベクトルが、保存量であることは、ベクトルの大きさとその方向が時間と共に変化しない値を持つことを意味している。角運動量ベクトルは、位置と速度のベクトル積なので、大きさは、両ベクトル間の角度 θ を使い、

$$|\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mrv\sin\theta \tag{6.12}$$

と表わせる。この右辺は、質点が中心の回りを運動する際の、質点と中心を結んだ直線で定義される面積の変化する割合、すなわち面積速度、を表わしている。そのため、角運動量ベクトルが一定であることは、面積速度が一定であることを示している。

次に、角運動量ベクトルと位置ベクトルならびに運動量ベクトルの内積は、

$$\vec{L}\cdot\vec{r}=0,\vec{L}\cdot\vec{p}=0 \tag{6.13}$$

となり、両ベクトルは角運動量ベクトルに直交する。そのため、角運動量ベクトルが時間によらず一定であることは、質点の位置ベクトルや速度ベクトルが角運動量ベクトルに直交する平面内にあることを意味し、ひいては質点がこの平面上を運動することを意味している。運動は、この平面内の二次元運動である。

6.2 二次元極座標

二次元平面上の点を、原点からの距離 r と一つの軸からの角度 θ を使い表わそう。

これらが、時間の関数として変化するとき、速度や、運動エネルギーは、これらの関数として、

$$x(t)=r(t)\cos\theta(t),y(t)=r(t)\sin\theta(t) \tag{6.14}$$

となるので、それぞれの時間微分は

$$\frac{d}{dt}x(t)=\dot{r}(t)\cos\theta(t)-r(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) \tag{6.15}$$

$$\frac{d}{dt}y(t)=\dot{r}(t)\sin\theta(t)+r(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t) \tag{6.16}$$

で与えられる。ここで、時間の関数 $f(t)$ の時間微分に対する簡易的な記法

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}f(t) \tag{6.17}$$

を導入した。以降、紛らわしくない限り、この記法を使うことにする。

このとき、角運動量は

$$L = m(y\frac{d}{dt}x - x\frac{d}{dt}y) = mr^2\dot{\theta} \tag{6.18}$$

となり、運動エネルギーは

$$\begin{aligned} E_{運動} &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 \qquad (6.19) \\ &= \frac{m}{2}((\dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t))^2 + (\dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\dot{\theta}(t))^2) \\ &= \frac{m}{2}((\dot{r}(t))^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

となる。右辺の第 1 項は、動径方向の速度の二乗であり、第 2 項は接線方向の速度の二乗である。動径方向の速度と接線方向の速度が直交するので、速度の大きさの二乗は、それぞれの二乗の和となる。ポテンシャル $U(r)$ で表わされる中心力の保存力 $\vec{F}$ の場合には、力学的エネルギー E

$$\begin{aligned} E &= E_{運動} + U(r) \qquad (6.20) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \end{aligned}$$

が一定になる。力学的エネルギーは、二つの変数 $r(t)$ とその時間微分 $\dot{r}(t)$、並びに角度変数の時間微分 $\dot{\theta}(t)$ で書かれる。このため、2 変数に関する連立微分方程式である運動方程式を、エネルギーが一定であることから導かれるただひとつの方程式を使い解くことは、一見不可能であるように見える。しかしながら、ここで考察している中心力では、エネルギーだけでなくさらに、式 (6.8) より角運動量が時間によらず一定な値となっている。角運動量は、式 (6.18) より、角度変数の時間微分 $\dot{\theta}(t)$ で書かれるで、角速度を角運動量で

$$\frac{d}{dt}\theta = \frac{L}{mr^2} \tag{6.21}$$

と表わして、エネルギーに代入すると、

$$\begin{aligned} E &= E_{運動} + U(r) \qquad (6.22) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}(t)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}) + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}(t)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \end{aligned}$$

が得られる。この式は、一次元運動の場合と同様に、座標 $r(t)$ とその一階微分だけで書かれたエネルギーの式である。そのため、エネルギーの式を使うことにより、運動の解を容易に求めることができる。

6.3 問題

6.3.1 ２次元中心力問題

２次元平面内で力、

$$\vec{F} = -k\vec{r} \tag{6.23}$$

が加わった質量 M の質点の運動の解をデカルト座標で求め、角運動量が一定であることを確認せよ。また、初期条件から、どのように角運動量の値や、面積の変化する速さが決まるか？

6.3.2 ２次元極座標

上の問題を２次元極座標 (r, θ) を使い、エネルギー、E、角運動量、M_z、をもつ運動の方程式を動径座標 $r(t)$ について求め、次にこれを積分して運動の解を求めよ。

6.3.3 ２次元振動問題

上の問題で、初期条件が

$$\vec{r} = (A, 0), \vec{v} = (0, 0) \tag{6.24}$$

$$\vec{r} = (0, 0), \vec{v} = (B, 0) \tag{6.25}$$

の場合は、解はそれぞれどうなるか？二つの解が一致するのは、A と B がいかなる関係にあるときか？

また、初期条件が

$$\vec{r} = \vec{r}_1, \vec{v} = \vec{v}_1 \tag{6.26}$$

である場合の運動を求めよ。

6.3.4 ケプラー問題

ポテンシャルが

$$U = -c\frac{1}{r} \tag{6.27}$$

である場合の、エネルギー保存則と、角運動量保存則を書きくだせ。

解　1

ｘ成分を $x(t)$、ｙ成分を $y(t)$ とすると運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \tag{6.28}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -ky(t) \tag{6.29}$$

であり、解はそれぞれ

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha) \tag{6.30}$$

$$y = y_0 \cos(\omega t + \beta) \tag{6.31}$$

となる。ここで、x_0, y_0, α, β は初期条件で決定される。速度の成分は、上の式を微分して

$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{6.32}$$

$$\dot{y} = -\omega y_0 \sin(\omega t + \beta) \tag{6.33}$$

となる。

ここで、角運動量のｚ成分は、

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\omega x_0 y_0 \sin(\beta - \alpha) \tag{6.34}$$

となり、時間によらないことがわかる。この値は、初期条件で決まっている。またエネルギーは

$$\frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{k}{2}\vec{x}^2 = \frac{k}{2}(x_0^2 + y_0^2) \tag{6.35}$$

であり、やはり初期条件によって決まり時間によって変化しない定数となっている。

解　2

エネルギー E と角運動量 L_z を、極座標で表わすと、本文と同じで、

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{k}{2}\vec{x}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}r^2 \\ L_z &= mr^2\dot{\theta} \end{aligned} \tag{6.36}$$

である。

ここで速度ベクトルのｘ成分とｙ成分を、変数 $(r(t), \theta(t))$ を使い表わそう。位置ベクトルの時間微分は、

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t)) \\ &= (\dot{r}(t)\cos\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)(-)\sin\theta(t), \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)) \end{aligned} \tag{6.37}$$

であることより、速度ベクトルの２乗は

$$\vec{v}^2 = (\dot{r}(t))^2 + r^2(\dot{\theta})^2 \tag{6.38}$$

となる。$\theta(t)$ の時間微分を、角運動量 L_z と動径座標 r を使い

$$\dot{\theta} = \frac{L_z}{mr^2} \tag{6.39}$$

と表わせる。これをエネルギーの式に代入して、

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}) + \frac{k}{2}r^2 \tag{6.40}$$

となり、さらに $\frac{dt}{dr}$ について解いて、微分方程式

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2E/m - L_z^2/m^2r^2 - \frac{k}{m}r^2}} \tag{6.41}$$

が得られる。この式の両辺を積分すると、

$$t + t_0 = \int dr \frac{1}{\sqrt{2E/m - L_z^2/m^2r^2 - \frac{k}{m}r^2}} \tag{6.42}$$

右辺の積分を求めるには、変数変換

$$r^2 = s, 2rdr = ds \tag{6.43}$$

を行うとよい。変数 s を使い積分は、

$$\begin{aligned} &\int ds \frac{1}{2\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{2E/m - L_z^2/m^2s - \frac{k}{m}s}} \\ &= \int ds \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2Es/m - L_z^2/m^2 - \frac{k}{m}s^2}} \end{aligned} \tag{6.44}$$

と表わせる。被積分関数の分母の平行根の中を完全平方の形に書き直し、積分が

$$\int ds \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{A - \frac{k}{m}(s - E/k)^2}}, A = \frac{E^2}{mk} - \frac{L_z^2}{m^2} \tag{6.45}$$

と変形できる。この積分は、

$$\int ds \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{A - \frac{k}{m}(s - E/k)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} sin^{-1}(\sqrt{\frac{k}{mA}}(s - \frac{E}{k})) \tag{6.46}$$

である。$s = r^2$ を代入して、解は、

$$t + t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} sin^{-1}(\sqrt{\frac{k}{mA}}(r^2 - \frac{E}{k})) \tag{6.47}$$

と、三角関数の逆関数を使い表わせる。逆関数の定義から、この関数関係から、

$$\sin 2\omega(t + t_0) = (\sqrt{\frac{k}{mA}}(r^2 - \frac{E}{k})) \tag{6.48}$$

が得られる。さらに見やすい形に書き換えると、

$$r(t)^2 - \frac{E}{k} = \sqrt{\frac{mA}{k}} \sin 2\omega(t + t_0) \tag{6.49}$$

となる。

解　3

一般解を使い、初期条件は

$$x(0) = x_0 \cos\alpha, \dot{x}(0) = -\omega x_0 \sin\alpha \tag{6.50}$$

$$y(0) = y_0 \cos\beta, \dot{y}(0) = -\omega y_0 \sin\beta \tag{6.51}$$

と表わせる。

初期条件が

$$\vec{r} = (A, 0), \vec{v} = (0, 0) \tag{6.52}$$

である時, 初期条件を合わせて、

$$A = x_0 \cos\alpha, 0 = -\omega x_0 \sin\alpha \tag{6.53}$$

$$0 = y_0 \cos\beta, 0 = -\omega y_0 \sin\beta \tag{6.54}$$

となり、これから初期位相や、振幅が

$$\alpha = 0, x_0 = A \tag{6.55}$$

$$\beta = 0, y_0 = 0 \tag{6.56}$$

と決まる。よって解は、

$$x(t) = A\cos\omega t, \tag{6.57}$$

$$y(t) = o$$

である。

また、初期条件が

$$\vec{r} = (0,0), \vec{v} = (B,0) \tag{6.58}$$

であるとき、

$$0 = x_0 \cos\alpha, B = -\omega x_0 \sin\alpha \tag{6.59}$$

$$0 = y_0 \cos\beta, 0 = -\omega y_0 \sin\beta \tag{6.60}$$

から、それぞれが

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, x_0 = -\frac{B}{\omega} \tag{6.61}$$

$$\beta = 0, y_0 = 0 \tag{6.62}$$

となる。よって解は、

$$x(t) = -\frac{B}{\omega}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{B}{\omega}\sin(\omega t), \tag{6.63}$$

$$y(t) = o$$

である。二つの解 (6.57) と (6.63) は、

$$A = \frac{B}{\omega} \tag{6.64}$$

のとき、**ほぼ一致する**。ただし、完全に一致するわけではなく、位相が少しずれている。

解　4

本文中の式 (6.20)(6.22) に、$U(r) = -c\frac{1}{r}$ を代入する。

第7章　惑星の運動とケプラーの法則

7.1　ケプラーの法則

惑星の運動の研究は、長年にわたる観測や多難な考察を通して進展し、また歴史的に力学の発展を促す働きをした。物理法則は、際めて普遍的であることが現在では良く知られているが、まだ物理が発展していない昔は、多様な自然現象の背後にある普遍的な法則は、それほど認識されていなかった。惑星の研究の進展と、力学法則の理解が一緒になされた。観測に基づいて、ケプラーは惑星に関して１６０９－１６１８年に次の３法則を発見した。

（１）惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である。

（２）太陽から一つの惑星に引いた動径の描く面積速度は一定である。

（３）諸惑星の公転の周期の二乗は、惑星の長軸の３乗に比例する。

ケプラーの３法則を理解するには、運動の法則、特に運動方程式が必要であると共に、太陽と惑星の間に働く力である万有引力の性質をしることが必要である。

ケプラーの第２法則である面積速度の一定則は、角運動量の保存則から導かれることを、以前見てきた。だから、万有引力は、中心力である。

7.2　万有引力の法則

第２法則は、万有引力の大きさに関する情報を与える。万有引力の大きさが、太陽と惑星の間の距離の n 乗に反比例する大きさ

$$F = C\frac{1}{r^n} \tag{7.1}$$

であると仮定し、さらに惑星が円運動をするとしよう。多くの惑星は、厳密には楕円運動であるが、良い近似で円運動である。だから、円運動とみなすのは、悪くない。ところで、円運動で働く力は、質量 m 半径 R と角速度 ω で、

$$F = mR\omega^2 \tag{7.2}$$

となる。また、周期 T とは、一周する時間であり角速度 ω を使い

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{7.3}$$

と表わされる。これらより成立する等式、

$$C\frac{1}{R^n} = mR(\frac{2\pi}{T})^2 \tag{7.4}$$

をといて、

$$T^2 = \frac{m(2\pi)^2}{C}R^{n+1} \tag{7.5}$$

と、周期の 2 乗が距離の $n+1$ 乗となるはずである。だから、ケプラーの第 3 法則は、n が 2 であることを示してい、太陽と惑星の間の力の大きさは、距離の 2 乗に反比例する

$$F = C\frac{1}{r^2} \tag{7.6}$$

である。比例係数 C は、二つの質量に比例して、

$$C = GMm \tag{7.7}$$

となる。ここで G は、万有引力定数である。

7.3 惑星の運動

最後にケプラーの第 1 法則を運動方程式から導こう。距離の 2 乗に反比例する大きさで、中心方向を向いた力、

$$\vec{F} = -C\frac{1}{r^2}\vec{n} \tag{7.8}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \tag{7.9}$$

は、ポテンシャル

$$U(r) = -C\frac{1}{r} \tag{7.10}$$

から導かれる保存力である。このため、運動エネルギーと位置エネルギーの和である力学的エネルギーが時間によらない一定な値となる。もちろん、中心力であるので、角運動量が一定に保たれている。

解 (5.85) 式を

$$\cos\phi = \frac{\frac{M_z}{r} - \frac{mC}{M_z}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2C^2}{M_z^2}}} \tag{7.11}$$

と書き換えて軌道がわかる。軌道は、エネルギー E の値や、角運動量 M_z の値で異なるふるまいをする。

軌道の式 (7.11) を、２次曲線の標準形

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \tag{7.12}$$

に表すと、離心率 e と長さ l は、

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM_z^2}{mC^2}} \tag{7.13}$$

$$l = \frac{M_z^2}{mC} \tag{7.14}$$

となる。離心率の大きさの違いで２次曲線は、

$$e < 1, \text{楕円}; E < 0 \tag{7.15}$$

$$e = 1, \text{放物線}; E = 0 \tag{7.16}$$

$$e > 1, \text{双曲線}; E > 0 \tag{7.17}$$

と分類される。

このように、惑星の軌道は、エネルギー E の値と、角運動量 M_z の値で決定される。これらの値は、たとえばある時刻での初期条件で決まる。初期条件として、惑星の位置 $\vec{x}(0)$ と速度 $\vec{v}(0)$ を選び、さらに座標系として、これら二つのベクトルの面を xy 面にこれらと直交する方向を z 軸に選べば、惑星のエネルギーと角運動量は、

$$E = \frac{\vec{v}(0)^2}{2m} - \frac{C}{|\vec{x}(0)|} \tag{7.18}$$

$$Mz = m|\vec{x}(0) \times \vec{v}(0)| \tag{7.19}$$

となる。

7.3.1 楕円運動

$e < 1$ の場合は、軌道は楕円である。これは、エネルギーが負、$E < 0$、である時の運動であり、軌道は閉じている。角度 θ は、任意の値をとることができ、r は $\theta = \pi$ で最も大きく、$\theta = 0$ で最も小さくなり、それらの値は、

$$r_{\text{最大}} = \frac{l}{1 - e}, \theta = \pi \tag{7.20}$$

$$r_{\text{最小}} = \frac{1}{1 + e}, \theta = 0 \tag{7.21}$$

である。なお、離心率が零であるとき、楕円は特に円となる。半径 r は一定の値

$$r = l \tag{7.22}$$

である。これは、離心率 (7.13) より、

$$1 + \frac{2EM_z^2}{mC^2} = 0 \tag{7.23}$$

となる場合であり、エネルギーが

$$E = -\frac{mC^2}{2M_z^2} \tag{7.24}$$

となっている。

7.3.2 放物線運動

$e = 1$ の場合は、軌道は放物線である。エネルギーはゼロ、$E = 0$、であり、$\theta = 0$ で r は、発散する。r が発散することは、質点は無限遠から中心に近ずいた後、また無限遠に遠ざかる軌道である。

7.3.3 双曲線運動

$e>1$の場合は、軌道は双曲線である。エネルギーは正、$E>0$であり、角度θは$r>0$の条件より、

$$\cos\theta > -\frac{1}{e} \tag{7.25}$$

を満たす領域、

$$\theta \geq \theta_c, \theta_c = \cos^{-1}(\frac{-1}{e}) \tag{7.26}$$

である。

7.4 太陽、地球と月

地球は、太陽の周りを公転しながら自転している。地球の公転運動は、周期を１年（約３６５日）とし、長軸の長さを$1.521\times10^8 Km$、短軸の長さを$1.471\times10^8 Km$とする、離心率0.0167の円に近い楕円運動である。万有引力が中心力であるので、地球の運動は一つの平面（公転面）じょうにある。ほぼすべての惑星の離心率は小さく、下の表にあるように水星と冥王星をのぞくと火星が一番大きい。水星と冥王星は、一方は太陽に近すぎ、他方は太陽から遠すぎていずれも、ケプラーのころの観測では難しい星である。

惑星の離心率

水星, 0.2056
金星, 0.0068
地球, 0.0167
火星, 0.0934
木星, 0.0485
土星, 0.0555

天王星, 0.0463

海王星, 0.0090

冥王星, 0.2490

また、月が地球の周りをまわっている。月の公転運動は、周期約一月、長軸の長さ $384400Km$、平均離心率 0.0548799 の楕円運動である。また、月の質量は地球の質量のである。月の公転面は、地球の太陽周りの公転面にほぼ一致している。

これらのため、潮の満ち干、大潮や小潮、さらに日食等が発現している。

満潮と干潮

海水面の高さが、一日のうちに２回上下する。つまり、海水面が高くなる満潮が２回あり、海水面が低くなる干潮が２回ある。この現象は、地球の公転や自転、ならびに、月の運動の影響が海水に加わって起こる。

日食

日食は、太陽からの光が月にさえぎられて起きる現象である。偶然なことに、地球から見た時の太陽の大きさと、月の大きさはほぼ等しい。つまり、地球上で太陽を見る視角 $\theta_{太陽}$ と、月を見る視角 $\theta_{月}$ は、地球からの距離 $l_i, i =$ 太陽、月 と半径 $r_i, i =$ 太陽、月 で

$$\theta_{太陽} = \frac{R_{太陽}}{l_{太陽}} \tag{7.27}$$

$$\theta_{月} = \frac{R_{月}}{l_{月}} \tag{7.28}$$

と関係しているが、この視半径の値は、

１９９９年の金環食で

$$\theta_{太陽} = 16'11''.4 \tag{7.29}$$

$$\theta_{月} = 15'50''.7 \tag{7.30}$$

１９９９年の皆既日食で

$$\theta_{太陽} = 15'46''.8 \tag{7.31}$$

$$\theta_{月} = 16'00''.4 \tag{7.32}$$

とほぼ等しい。このように、日食には部分的に太陽が欠ける部分日食と、太陽全体が隠れる皆既日食、ならびに太陽の表面がわずかに見える金環日食がある。皆既日食では、太陽の外側のコロナ等が観測される。皆既日食や金環食の継続時間は、２－６分程度である。２００９年の皆既日食では、6 分を超える長時間であった。

7.5　動く座標系での運動法則

地球は公転や自転をして、動いている。動いている座標系で観測した時の運動は、静止した座標系での運動とは、異なる。

慣性の法則が成立する座標系を、慣性系という。慣性系では、運動方程式は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)=\vec{F} \tag{7.33}$$

である。

7.5.1　平行移動

では、観測者の位置が

$$\vec{x}_0(t) \tag{7.34}$$

で運動する座標系で運動方程式をどのように書かれるだろうか？例えば、動いている電車の中で、物体の運動はどのように記述されるか。この問題は、原点の位置が $\vec{x}_0(t)$ で与えられる座標系での運動方程式を求める事に帰着させる。この座標系での質点の位置ベクトル $\vec{\tilde{x}}$ は静止した座標系における位置ベクトルから原点の位置ベクトルを引いて、

$$\vec{\tilde{x}}(t)=\vec{x}(t)-\vec{x}_0(t) \tag{7.35}$$

と表わせる。慣性系における運動方程式の両辺から原点の加速度を差し引いて得られる式、

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}(t)-\vec{x}_0(t))=\vec{F}-m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_0(t) \tag{7.36}$$

に上の位置ベクトルを代入して、

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{\tilde{x}}(t)=\vec{\tilde{F}} \tag{7.37}$$

$$\vec{\tilde{F}}=\vec{F}-m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_0(t) \tag{7.38}$$

となる式が得られる。だから、この観測者からみた運動方程式は、座標系の運動から生じた項が加わった見かけの力 $\vec{F}-m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_0(t)$ で表わされる。見かけの力のため、動き始めた電車の中では、進行方向の反対向きに力が働き、逆にブレーキをかけて静止しつつある電車の中では、前のめりに進行方向に力が働く。

また、慣性系では力が働いている場合でも、座標系が運動して見かけの力が

$$\vec{\tilde{F}}=0 \tag{7.39}$$

と消失する場合が可能である。　この場合、この座標系では力が働かないことになる。たとえば、地球上の物体にはいつも重力が働いているが、自由落下する飛行機の中で物体の運動を調べると、見かけの重力は消失してゼロになる。つまり、無重力状態が実現している。

7.5.2 回転運動

同様に、回転する座標系 $(x', y', z' = z)$ での位置は、もとの座標系での位置 (x, y, z) と関係している。この関係は、両座標系の間の角度 θ を使い、

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \tag{7.40}$$

$$y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \tag{7.41}$$

$$\theta = \omega t \tag{7.42}$$

とあらわせる。このため、慣性系における速度の成分 v_x, v_y は、

$$\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}x'\cos\theta - x'\omega\sin\theta + \frac{d}{dt}y'\sin\theta + y'\omega\cos\theta \tag{7.43}$$

$$v_x = \tilde{v}'_x\cos\theta + \tilde{v}'_y\sin\theta \tag{7.44}$$

$$\tilde{v}'_x = (v'_x + y'\omega), \tilde{v}'_y = (v'_y - x'\omega) \tag{7.45}$$

$$\frac{d}{dt}y = -\frac{d}{dt}x'\sin\theta - x'\omega\cos\theta + \frac{d}{dt}y'\cos\theta - y'\omega\sin\theta \tag{7.46}$$

$$v_y = -\tilde{v}'_x\sin\theta + \tilde{v}'_y\cos\theta \tag{7.47}$$

$$\frac{d}{dt}\theta = \omega \tag{7.48}$$

となる。ただし上で回転座標系における速度の成分 v'_x, v'_y は、座標の時間微分

$$v'_x = \frac{d}{dt}x' \tag{7.49}$$

$$v'_y = \frac{d}{dt}y' \tag{7.50}$$

である。

慣性系における加速度は、速度の時間微分であるので、

$$\frac{d}{dt}v_x = \frac{d}{dt}\tilde{v}'_x\cos\theta - \tilde{v}'_x\omega\sin\theta + \frac{d}{dt}\tilde{v}'_y\sin\theta + \tilde{v}'_y\omega\cos\theta \tag{7.51}$$

$$a_x = \tilde{a}'_x\cos\theta + \tilde{a}'_y\sin\theta \tag{7.52}$$

$$\tilde{a}'_x = (\frac{d}{dt}\tilde{v}'_x + \tilde{v}'_y\omega), \tilde{a}'_y = (\frac{d}{dt}\tilde{v}'_y - \tilde{v}'_x\omega) \tag{7.53}$$

$$\frac{d}{dt}v_y = -\frac{d}{dt}\tilde{v}'_x\sin\theta - \tilde{v}'_x\omega\cos\theta + \frac{d}{dt}\tilde{v}'_y\cos\theta - \tilde{v}'_y\omega\sin\theta \tag{7.54}$$

$$a_y = -\tilde{a}'_x\sin\theta + \tilde{a}'_y\cos\theta \tag{7.55}$$

となる。慣性系における運動方程式、

$$ma_x = F_x \tag{7.56}$$

$$ma_y = F_y \tag{7.57}$$

における加速度 $\vec{a}$ を回転座標系における加速 $\vec{a}'$ で表わして、回転座標系における運動方程式

$$m(\tilde{a}'_x \cos\theta + \tilde{a}'_y \sin\theta) = F_x \tag{7.58}$$

$$m(\tilde{a}_y \cos\theta - \tilde{a}'_x \sin\theta) = F_y \tag{7.59}$$

が得られる。さらに、加速度 $\tilde{a}'_i(i = x, y)$ について解いて得られた、

$$m\tilde{a}'_x = F_x \cos\theta - F_y \sin\theta \tag{7.60}$$

$$m\tilde{a}'_y = F_y \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{7.61}$$

に、速度 $\tilde{v}'_i, (i = x, y)$ を使い書き直した式 (7.53) を代入して、

$$m(\frac{d}{dt}\tilde{v}'_x + (\frac{d}{dt}y' - x'\omega) = F_x \cos\theta - F_y \sin\theta \tag{7.62}$$

$$m(\frac{d}{dt}\tilde{v}'_y - \tilde{v}'_x\omega) = F_y \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{7.63}$$

となる。これを、回転座標系における運動方程式の形に変形する。その結果、

$$m(\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}x' + y'\omega) + (\frac{d}{dt}y' - x'\omega)\omega) = F_x \cos\theta - F_y \sin\theta \tag{7.64}$$

$$m(\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}y' - x'\omega) - (\frac{d}{dt}x' + y'\omega)\omega) = F_y \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{7.65}$$

と、右辺に速度に比例する力（コリオリ力）を含む運動方程式が得られ、最終的な運動方程式は

$$m\frac{d}{dt}v'_x = -2mv'_y\omega + mx'\omega^2 + F_x \cos\theta - F_y \sin\theta \tag{7.66}$$

$$m\frac{d}{dt}v'_y = +2mv'_x\omega + my'\omega^2 + F_y \sin\theta + F_y \cos\theta \tag{7.67}$$

となる。右辺第 1 項目はコリオリ力であり、角速度の大きさと速度に比例する。また、右辺第 2 項目は、距離と角速度の 2 乗に比例す遠心力である。回転座標系では、慣性系にはない見かけの力として、コリオリ力と遠心力の二つの力が含まれる。

フーコーの振り子

フーコーの振り子は、１０ｍを超える大きな振り子であり、上端が固定されていて一日中止まることなく振動できる。フーコーの振り子の振動運動から、地球の自転を反映した回転座標系における物体の運動が観察される。

f ケプラーの法則の発見

ケプラーは、どのように火星の観測データから面積速度一定の法則や楕円運動を発見したのだろうか。もともと、地球における天体観測では、星の天球上の位置がわかる。この位置

は、地球からみた角度を示すだけであり、距離はわからない。また、地球は、自転すると共に太陽の周りを公転しているし、火星も公転している。これらの結果、火星は極めて複雑な軌道を観測されることになる。これらの状況で、ケプラーの法則がいかに発見されたか、この経緯は、非常に面白いので、簡単に紹介しよう。

地球は、公転周期が３６５日（約１年）であり、火星の公転周期は、６５０日であり、当時既に知られていた。これらの最小公倍数は　大体　　年である。つまり、年で、地球と火星がともに同じ相対位置にもどる。しかも、地球と火星は、ほぼ同じ平面上で運動している。同じ平面上にあるので、太陽、地球、火星がほぼ一直線上に並ぶことがあり、しかもこれは地球の１年よりわずかに長い周期で起きる。これを衝と呼ぶ。ある衝の時刻を$t = 0$とすると、地球は３６５日ごとに同じ位置に戻る。しかし、このとき火星は同じ位置に戻るわけではなく、火星軌道の別な位置にある。

逆に、火星の１年（６５０日）ごとに、火星は元の位置に戻るが、地球は地球の軌道上の別の位置にある。そこで、火星の一年ごとに地球上から太陽と火星の位置を観測して、それらの位置（角度）を同定しよう。この値から、三角測量の原理を使い地球の位置が割り出せる。この地球の位置の同定を、火星と地球の年の公倍数の期間行う。すると、これらを総合して地球の太陽周りの軌道が割り出せる。これで、わかった地球の軌道をもとにして、今度は衝ごとの火星の位置を割り出す。これを、繰り返し行い、最後に火星の軌道がわかる。衝は、ほぼ　日ごとにあり、またこの時の地球の軌道上の位置は既に分かっている。このわかっている衝での地球の位置から、火星の位置を三角測量で同定する。

この数学を駆使する方法で解析した結果、ケプラーは先ずケプラーの第１法則と第２法則

を発見し、約１０年度第３法則を発見した。

チィコー – ブラーエの、主にコペンハーゲンの天文台で得られた２０年にわたる観測データが、ケプラーが赴任したプラハの天文台のチィコー – ブラーエのもとにあり、この解析をケプラーが引き継いだ。コペンハーゲン天文台により、観測の精度は、格段に向上した。そこでの長期間にわたる観測で得られた世界１の精度をもつデータを使える立場にあった点、ある意味、ケプラーは極めて幸運だったといえる。しかし、そのデータの意味を解明出来たのは、彼が一方で数学を駆使できる力を所持したからであり、ケプラーは自らの力で幸運を引きよせたといえるであろう。もちろん、２０年間近いチィコー – ブラーエの観測が存在しなかったら、ケプラーがケプラーの法則を発見することは、出来なかったであろうと言える。

ケプラーは、天体の観測からケプラーの３法則を発見して、惑星の運動についての普遍的な関係式を発見し、運動の法則や万有引力の法則を導く重要な鍵を探し当てた。

7.6 問題

7.6.1 ２次元運動と初期条件

２次元平面内で力、

$$\vec{F} = -k\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{7.68}$$

が加わった質量 M の質点の運動について、２次元極座標を使い、エネルギー、E、角運動量、M_z、をもつ運動の方程式を動径座標 $r(t)$ について求め、次にこれを積分して運動の解を求めよ。また、初期条件から、どのように角運動量の値や、面積の変化する速さが決まるか？

7.6.2 太陽と地球

太陽の周りの地球の運動について、周期１年、質量　　　Ｋｇ、長軸　　、短軸　、であることを使いエネルギー、E、角運動量、M_z、の値を求めよ。

7.6.3 問題３

7.6.4 問題４

第8章　質点の集まりと剛体

ここまでは、一つの質点の運動が、ニュートンの運動法則から、完全に解明できることをみた。しかし質点は、理想化した物体でありまた、一つの質点が、単独で孤立して存在することはまれである。むしろ逆に、質点が多数集まっていることが多い。一つの質点の運動がわかれば、質点が多数集まって互いに作用しあっている物理系の運動もわかる。

これら多数の質点のそれぞれに対して運動方程式が成り立つ。各質点の位置は、独立な変数である。これらを時間で２階微分した加速度が、それぞれの質量とそれぞれに働く力で表わせる。だから、各質点に作用する力がわかれば、質点に対する運動法則を適用することで、すべての質点の運動が解明できる。

粒子が集まっている系で、粒子が互いに力を及ぼしあっている時、作用 · 反作用の法則であるニュートンの運動の第三法則が大事な働きをする。作用 · 反作用の法則から、粒子１が粒子２に及ぼす作用と、粒子２が粒子１に及ぼす反作用は、大きさが等しく方向が逆である。

いま N 個の粒子に、１から N まで番号をつけよう。そして、それらの位置ベクトルを $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_N$ とする。これらの粒子に働く力 $\vec{F}_i(i = 1, N)$ は、外力と粒子 j から働く力の２つの成分

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(0)} + \sum_j \vec{F}_{(i,j)} \tag{8.1}$$

を持つ。作用 · 反作用の法則は、

$$\vec{F}_{(i,j)} = -\vec{F}_{(j,i)} \tag{8.2}$$

が成り立つことを意味する。作用 · 反作用の法則より、内力は、系全体の運動には影響を与えない。

8.1 2体問題

最も簡単な二つの粒子が力を及ぼしあう系を、先ず考察しよう。

粒子1の質量を m_1、座標を $\vec{x}_1(t)$、粒子2の質量を m_2、座標を $\vec{x}_2(t)$ として、運動方程式は、

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_1(t) = \vec{F}_1^{(0)} + \vec{F}_{(1,2)} \tag{8.3}$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_2(t) = \vec{F}_2^{(0)} + \vec{F}_{(2,1)} \tag{8.4}$$

となる。いま簡単のため、外力が働かず、両者の間の内力だけが働く系を考える。また、内力は電荷間のクーロン力や万有引力と同じに、両座標の差で決まるものとする。

作用 · 反作用の法則と上の仮定から、力が

$$\vec{F}_{(1,2)} = -\vec{F}_{(2,1)} = \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{8.5}$$

となるので、運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_1(t) = \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{8.6}$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_2(t) = -\vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \tag{8.7}$$

である。二つの未知変数で表わされる2体の運動は、二つの独立な方程式から、完全に決まる。

8.1.1 運動量保存則

上の2つの運動方程式の両辺の和から、

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t)) = 0 \tag{8.8}$$

が得られる。つまり、各粒子の運動量、$\vec{p}_1 = m_1\dot{\vec{x}}_1, \vec{p}_2 = m_2\dot{\vec{x}}_2$ の和は

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{8.9}$$

と保存する。運動量保存則は、内力の形に無関係にいつも成り立つ。

運動量保存則を、二粒子の質量中心を使い別の表現であらわす事もできる。質量中心は、各質量を重みにして平均をとった位置座標

$$\vec{X}_G = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2} \tag{8.10}$$

である。これを、運動量保存の式に代入して、質量中心の等加速度運動を表す方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{X}_G = 0 \tag{8.11}$$

が得られる。つまり、内力は質量中心の運動には関わらない。

両座標の差である相対座標 $\vec{r}$ は、各座標から質量中心座標を引いて

$$\vec{x}_1 = \vec{X}_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{8.12}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{X}_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{8.13}$$

で定義される。また、相対座標は、

$$\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \tag{8.14}$$

とも書かれ、さらに運動方程式

$$\mu\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}) \tag{8.15}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{8.16}$$

を満たす。相対座標が満たす運動方程式の質量は、それぞれの質量から計算される換算質量 μ である。つまり二体系は、自由粒子の運動と一つの質点の運動と等価である。換算質量は m_1 と m_2 の間の値をとる。

8.2 多体系の運動方程式

多数の粒子からなる系で、粒子 i に対する運動方程式は、

$$m_i\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_i(t) = \vec{F}_i^{(0)} + \sum_j \vec{F}_{(i,j)} \tag{8.17}$$

となる。ここで外力は、粒子 i の座標で決まる関数

$$\vec{F}_i^{(0)} = \vec{F}_i^{(0)}(\vec{x}_i) \tag{8.18}$$

であり、内力は、粒子 i と粒子 j の両座標の差で決まる関数

$$\vec{F}_{(i,j)} = \vec{F}_i^{(0)}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \tag{8.19}$$

とする。

8.2.1 多体系の質量中心

外力のない N 個の粒子がある系では、質量中心の座標は、

$$\vec{X}_G = \frac{1}{M_{total}} \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{x}_i) \tag{8.20}$$

$$M_{total} = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{8.21}$$

となる。作用 · 反作用の法則から $\vec{F}_{(ij)} = -\vec{F}_{(ji)}$ となることより、質量中心は、運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{X}_G(t) = 0 \tag{8.22}$$

を満たす。つまり、質量中心は全質量 M_{total} をもつ自由粒子として運動する。この関係式は、全運動量

$$\vec{P}_{total} = M_{total} \frac{d}{dt} \vec{X}_G(t) \tag{8.23}$$

が保存して、時間に依存しない一定の値

$$\vec{P}_{total} = 一定, \frac{d}{dt} \vec{P}_{total} = 0 \tag{8.24}$$

となることも示している。

8.2.2 保存力とエネルギー

内力と外力がともに保存力である時、いかなるエネルギーが保存するだろうか？
いま、外力が、ポテンシャル $U^{(0)}(\vec{x})$ で

$$\vec{F}_i^{(0)} = -\nabla U^{(0)}(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}_i} \tag{8.25}$$

と表わされ、また内力が、ポテンシャル $U_{int}(\vec{x})$ で

$$\vec{F}_{i,j} = -\nabla U_{int}(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}_i-\vec{x}_j} \tag{8.26}$$

と表わされるとする。この多粒子系の全エネルギーは、

$$E = \frac{m_i}{2}\vec{v}^2 + \sum_i U^{(0)}(\vec{x}_i) + \sum_{i\geq j} U_{int}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \tag{8.27}$$

となり、

$$\frac{d}{dt}E = m_i\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla(\sum_i U^{(0)}(\vec{x}_i) + \sum_{i\geq j} U_{int}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)) = 0 \tag{8.28}$$

保存するエネルギーである。

8.3 気体分子運動論

気体は、小さな気体分子が集まって構成されている。一つの分子は、非常に小さく軽い。大きさは、１方向に 10^{-10}m 程度であり、質量は、10^{-23} g ほどである、だから１モルの気体に含まれる分子数は、アボガドロ数 6×10^{23} もの大きな数である。それぞれの分子は、通常は電気的に中性であり、分子間の力は小さい。だから、気体分子は、ほぼ自由な粒子のように扱える。このような気体の成り立ち方が、気体全体の性質を決定している。

箱に閉じ込められた気体分子は、敷居の壁と衝突して跳ね返る。この衝突は、エネルギーを失わない弾性衝突である。ただし、壁と運動量を交換している。この運動量のやりとりが、壁に圧力を与える。

8.3.1 気体分子の衝突

各粒子は壁との衝突で運動量を変えるが、エネルギーは変えない。粒子 i に働く力を $\vec{F}_i$ とすると、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \vec{F}_i \tag{8.29}$$

である。

いま、図のような箱の中にある気体で、ｘｙ面内にある壁と分子との衝突を考察する。このとき、力は z 方向に働き、x 方向や y 方向は自由な運動のままである。

z 成分についての運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}p_i^z = F_i^z \tag{8.30}$$

である。無限小の変化を、有限の微小量に置き換えると、一階の衝突で、微小時間間隔 δt の間に微小の運動量変化量 δp^z が起き、これらは、関係式

$$\delta p_i^z = F_i^z \delta t \tag{8.31}$$

に従う。

衝突が弾性衝突であることから、

$$\delta p^z = 2p^z \tag{8.32}$$

となり、また１秒の間に起きる衝突回数を n とすると、１秒間の間に壁が感じる力 F^z は、

$$2np_i^z = F^z \tag{8.33}$$

となる。また回数 n は、速度の z 成分と１往復の長さ $2l_z$ から、

$$n = \frac{v_z}{2l_z}, v_z = \frac{p^z}{m} \tag{8.34}$$

となる。壁が感じる力は、以上をまとめて、

$$F^z = \frac{p^z v_z}{l_z} = \frac{p^{z2}}{ml_z} \tag{8.35}$$

となる。さらに壁の面積を S とすると、圧力 P は、

$$P = \frac{F^z}{S} = \frac{p^{z2}}{mSl_z} = \frac{p^{z2}}{mV} \tag{8.36}$$

$$V = l_z S \tag{8.37}$$

と、体積に反比例することがわかる。

8.4 剛体

大きさを無視できない大きな物体では、その状態を一意的に決めるために必要な変数の数は、質点の場合よりもはるかに多い。しかし大きさをもつ物体で、形を変えないものでは、数はそれほど大きくはない。形を変えない物体を剛体という。剛体内の任意の２点間の距離は、いつも一定である。だから、剛体の状態の指定は位置と角度で十分であり、その結果、

剛体の運動は２種類に限られる。一つめは、剛体がそのまま平行移動する運動であり、二つ目は剛体が一定の軸の周りにする回転運動である。

剛体の小さな各部に名前 i をつけ、その位置を $\vec{x}_i$ とし、質量を m_i とする。j 番目の部分に働く外力を $\vec{F}_i^{(0)}$ 内力を $\vec{F}_{(i,j)}$ として、運動方程式は、

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_i = \vec{F}_i^{(0)} + \vec{F}_{(i,j)} \tag{8.38}$$

となる。ここでは、内力は中心力であるとする。全質量 M_{total} と質量中心 $\vec{X}_G$

$$\vec{X}_G = \frac{1}{M_{total}} \sum_i \vec{x}_l, M_{total} = \sum_l m_l \tag{8.39}$$

を使い、質量中心の運動は、

$$M_{total} \frac{d^2}{dt^2}\vec{X}_G = \sum_l \vec{F}_l^{(0)} \tag{8.40}$$

で記述される。

また、全角運動量、

$$\vec{L} = \sum_l m_l \vec{x}_l \times \dot{\vec{x}}_l \tag{8.41}$$

は、運動方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N}, \vec{N} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(0)} \tag{8.42}$$

を満たす。上の導出で、内力が、作用反作用の性質

$$\sum_{(i,j)} \vec{F}_{(i,j)} = 0 \tag{8.43}$$

と中心力の性質

$$\sum_{(i,j)} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{F}_{(i,j)} = 0, \vec{F}_{(i,j)} = (\vec{x}_i - \vec{x}_j)F_{(i,j)} \tag{8.44}$$

を満たすことを使った。また、$\vec{N}$ は、力のモーメントという。
原点を通る軸周りの回転運動では、

$$\dot{\vec{x}}_i = \vec{\Omega} \times \vec{x}_i, v_i = \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \tag{8.45}$$

運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \sum_l \frac{1}{2} m_l \vec{v}_l^2 \qquad (8.46) \\ &= \sum_l \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j \qquad (8.47) \\ & \qquad (8.48) \end{aligned}$$

と、回転ベクトルの成分 Ω_i と慣性モーメント I_{ij} で表わされる。ここで、慣性モーメントは

$$I_{ij} = \sum_l (\vec{x}_l^2 \delta_{ij} - x_l^i x_l^j) \tag{8.49}$$

であり、剛体の形や大きさによって決まる剛体の回転の性質を表す量である。

8.4.1 滑車の運動：アトウッドの機械

図のような滑車の運動では、重力と紐の張力が働き、回転運動と落下運動とがともに起きている。

回転については、運動方程式

8.4.2 ボートの運動

人間が漕ぐことで進む**ボートの力学**は、力学の題材として興味深い。しかも、様々な効果が効いているため結構複雑である。力により運動が生じる点では、今まで論じてきた運動の物理と同じであるが、様々な力が働くことや、流体内の運動が絡むことで、解析はより難しくなる。ここでは、レガッタで使われるボートを力学的に考察する。前の節で示したように、大きさや構造をもつ物体の運動で、内力は全体の質量中心の運動には寄与しない。たとえば、車の中で座っている人がいくら強く車を押しても、これは内力であるので、車の移動には関連しない。ところがボートでは、うまく内力を外力に変換している。

ボートの構造は、図のようであり、艇の一部として外側にせり出しているリガーに、オールの一点が角度が自由に変われるように固定されている。漕手が引くオールは、この固定点を中心に、円運動する。この運動を水からみると、オールの先のブレードが水中でほぼ静止し、漕手の力はオールを梃にして艇に伝わる。この結果、この力を推進力として艇が進む。

次に、これを漕手から見る。漕手は、足先を艇に固定し、艇上のレールの上を自由に移動できる座席に座っている。ブレードを水中にいれた状態で、漕手が足の屈伸の力を使いつかんだオールを引くと、オールの先のブレードが水を後方に押しやる。その反作用で水が艇を押し、その結果艇が進む。この反作用を引き起こす水が大きな塊であれば、反作用の力は大きくなる。逆にこれが小さければ、反作用の力は小さい。極端な場合として、空気をオールで後方に押しやるとしてみよう。押しやる空気は非常に軽いので、その運動量も小さい。だから艇が受ける反作用も小さくなり、艇はほとんど進まない。逆に、重い物体を後方に速く押しやれば、その運動量が大きくなる結果、反作用も大きくなり艇は大きな速さを得る。だから大きな水の塊に後方への大きな速度をもたせ、それらの積を大きくすることは、艇の推進力にとって極めて重要である。昔から、”オールが作る泡の大きさから加わっている力を

判断する ”ことがなされてきた。この泡は、空気の泡ではなく、水の皺のようなものであり、オールに力を与える水の塊であり、オールの運動によって一様ではなくなった水のことだと思えば良い。このように、水の塊の大きさとそれが持つ運動量が、大きな力を得るために実際重要である。

ボールを、大きな壁にぶつけると大きく跳ねかえるが、小さな物体にぶつけると跳ね返りが小さいのと同じことである。

ボートは、オールを引く漕手による力を推進力として進むが、その効率はあげるためには、物理的な解析は有効である。

ところで、艇は水に浮いている。そのため、水から進行方向とは逆向きに、進行を止める方向の抵抗をいつも受ける。水からのこの抵抗は、小さいほうがロスが少なく効率が良い。しかしながら一方で、ボートの推進力を与えるのは、ブレードが水を押す力の反作用であるが、この水は静止しているわけではなくスリップする。スリップも考慮すると、ブレードと水との抵抗（粘性抵抗）が重要な働きをする。前述の水の塊は、この抵抗が大きいほうが大きく働き、その結果推進力を効率的に発生できる。オールから大きな推進力を得ながら、艇と水との抵抗を小さくするのは、二つの相矛盾することを実現させることになる。力が速さにどのように依存するかが、重要な鍵となる。

オールからの推進力

漕手が、オールの先のブレードを水中に入れたままオールを引くとき、第一近似として、ブレードが水に対して静止しているとしよう。実際は、上で述べたように液体である水は動くのでブレードはスリップする。この効果は重要であるが、少し難しいので、後で考察する。

オールの先を固定点として、オールや漕手が移動し、力が艇にかかる。この力を推進力として、艇の加速度が作られ、艇が進む。全質量を M、質量中心を $\vec{x}(t)$ とすると、運動方程式は推進力と抵抗の力を含み、

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \vec{F}_{推進} + \vec{F}_{抵抗} \tag{8.50}$$

となる。ここで、艇の質量中心を $\vec{x}_b$、漕手の位置を $\vec{x}_i, i = 1, 8$、とすると、

$$\vec{x} = \frac{1}{M}(m_b\vec{x}_b + \sum_{i=1}^{8} m_i\vec{x}_i), M = m_b + \sum_i m_i \tag{8.51}$$

である。漕手の艇での相対速度 $\vec{r}_i$ は、

$$\vec{r}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_b \tag{8.52}$$

である。

水の抵抗

流体の抵抗は、固体表面における抵抗とは異なり、速度に依存する。ボートの受ける抵抗は、水との相対速度に依存した大きさをもつ。速さを v、比例係数を $c_1, c_2, c_3, \cdots$、速度方向

の単位ベクトルを $\vec{n}$ とすると、抵抗の力は

$$\vec{F}_{\text{抵抗}} = -(c_1 v + c_2 v^2 + c_3 v^3 + \cdots)\vec{n}_v \tag{8.53}$$

と表わされる。

漕手の力

漕手がオールを引く力を $\vec{F}_i$ とし、足で艇を押す力を $\vec{F}_i^f$ とする。オールに働く力に着目して運動方程式をたてよう。オールの先のブレードが水中に静止しているとき、この点の周りの角速度を $_Omega$ とすると、オールに加わる力は、漕手の力と艇からの反作用の力であるので、これらの間に回転に関する運動方程式が成立する。艇に加わる力を $\vec{f}_i$、オールの長さを L　オール先からリガーとの固定点までの長さを $L-l$ とすると、力のモーメントから、

$$L\vec{F}_i - (L-l)\vec{f}_i = L\frac{d}{dt}\Omega\vec{n} \tag{8.54}$$

が成立する。$\vec{n}$ は、艇の進行方向の単位ベクトルである。

8.5　剛体の釣り合い

剛体は質量をもつと共に、大きさを持つ。そのため、重力、抗力や他の様々な力を受けることが多い。複数の力が働いている時、その位置が固定されて静止しているとき、これらの力は釣り合い、合力がゼロベクトルになっている。また剛体に働く力のモーメントも、零になっている。釣り合いの条件を求めるには、剛体に働くすべての力を知ることが必須である。だから自然界に存在する力を知ることが、必要である。力がわかれば、釣り合いの条件を明らかにするのは、それほぼ難しいことではない。

8.5.1　剛体を２点で支える

質量 M をもち、長さ L の棒状の物体が２点で支えられて、静止している。この物体に働く力は、重力と２点における力 F_1, F_2 であり、これらは釣りあって合力と全体の力のモーメントが零になっている。

力が釣り合う条件と力のモーメントが釣り合う条件から、

$$F_1 + F_2 - Mg = 0 \tag{8.55}$$
$$x_1 F_1 - Mg\frac{L}{2} + x_2 F_2 = 0$$

が成り立つ。この２式より、二つの力は、

$$F_1 = \tag{8.56}$$
$$F_2 =$$

となる。

8.5.2　壁に立てかけた棒

図のような、壁に立てかけられた棒が安定にとどまる条件を求める。棒に働く力は、重力、壁からの抗力と摩擦力、そして床からの抗力と摩擦力である。

これらの力の和がゼロになること、並びに適当な点の周りの力のモーメントがゼロになる条件が、釣り合いの条件でありこれを求める。

8.5.3　積み上げブロック

次に図Ｂのような、床に立方体を積み上げるときの釣りあいの条件を求める。これらの複数の立方体が積み上げられた全体は剛体とはみなされないが、静止した複数の物体の力の釣り合う条件は、剛体の場合と同じである。

これらの力の和がゼロになること、並びに適当な点の周りの力のモーメントがゼロになる条件が、求める釣り合いの条件でありこれを求める。

8.5.4　水中で静止している物体

水中で、体積 V 質量 M の物体が静止している。水の密度を ρ_1 とこの物体の密度を ρ_2 として、釣り合いの条件から、この物体の密度を求めよ。

8.6　問題

8.6.1　クレーン

図のようなクレーンで

8.6.2　剛体 1

図のような椅子に座っている

8.6.3　剛体 2

図のようなアーチ状の橋

8.6.4　分子運動論

第9章　振動

時間と共に周期的な運動が繰り返される振動は、様々な物理や道具や機械、また装置等に現れる代表的な力学的運動である。さらに、単純な場合の振動は、運動方程式を厳密に解くことができる。そのため、具体的に力学の諸問題を考察できる。その結果、運動方程式に基づいた力学の理解を深めるのに大変役立つ。この章で、単純な単振動から、より複雑な振動までまとめておく。

9.1　等速円運動

最も簡単な周期運動は、一つの平面上で半径が一定の円周上を質点が同じ角速度で運動する等速円運動である。半径を R、角速度を ω とする等速円運動は、周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ をもつ周期運動であり、また2次元の位置座標が時間 t の関数として、

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos\omega t \\ y(t) &= R\sin\omega t \end{aligned} \tag{9.1}$$

と変化する。速度は、位置を時間で微分して

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -R\omega\sin\omega t \\ v_y(t) &= R\omega\cos\omega t \end{aligned} \tag{9.2}$$

となり、さらに加速度は、

$$\begin{aligned} a_x(t) &= -R\omega^2\cos\omega t \\ a_y(t) &= -R\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \tag{9.3}$$

となる。速度も加速度も時間の周期運動である。

加速度と質量を運動方程式に入れてると、等速円運動を引き起こす力が分かる。力の成分は、加速度に質量をかけた

$$\begin{aligned} F_x(t) &= -mR\omega^2\cos\omega t \\ F_y(t) &= -mR\omega^2\sin\omega t \end{aligned} \tag{9.4}$$

であり中心方向を向いた向心力である。この力を、位置ベクトルの成分 (9.2) と比較して、各成分が運動方程式、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -m\omega^2 x(t) \tag{9.5}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -m\omega^2 y(t) \tag{9.6}$$

を満たすことがわかる。つまりそれぞれの成分は独立に、次に述べる単振動の運動方程式を満たす。

9.2 単振動

変位 $x(t)$ に比例する引力が働く質量 m の物体の運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) \tag{9.7}$$

の解は、

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.8}$$

である。ここで、k はばね定数であり、解における A は振幅、α は初期位相という。任意の値の振幅と初期位相で、運動方程式を満たしている。これらは、運動方程式には含まれない定数であり、$t = 0$ での位置と速度の値で決まる。このような条件、つまり、初期条件を満たす運動方程式の解は、ただ一つである。

単振動は時間とともに、同じ運動が無限に繰り返す周期運動であり、

$$x(t+T) = x(t) \tag{9.9}$$

を満たす最も短い時間である周期 T は、今の場合

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{9.10}$$

である。単振動の方程式や運動は、等速円運動を一方向に射影したものと完全に一致する。

単振動の力はポテンシャルで書かれる保存力であるので、運動エネルギーと位置エネルギーの和である力学的エネルギーは保存する。力学的エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}v(t)^2 + \frac{k}{2}x(t)^2 \tag{9.11}$$

であり、上の解を代入して

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{2}A^2(\sin^2(\omega t+\alpha)+\cos^2(\omega t+\alpha)) \\
&= \frac{k}{2}A^2 \qquad (9.12)
\end{aligned}
$$

と、ばね定数と振幅だけで書かれる。力学的エネルギーは、実際、時間によらない定数である。振幅は、初期条件で決定されるので、初期条件を変えると、力学的エネルギーは、変わる。

運動方程式の解法として、未知のパラメーター γ を使い

$$x(t) = Ae^{\gamma t} \tag{9.13}$$

と仮定するのも一方法である。この形を方程式に代入すると、

$$(m\gamma^2+k)Ae^{\gamma t} = 0 \tag{9.14}$$

となる。よって、未知のパラメーター γ は

$$\gamma = \pm i\omega \tag{9.15}$$

である。γ の $\pm$ 符号の値に対応する二つの解

$$e^{i\omega t}, e^{-i\omega t} \tag{9.16}$$

が、このようにわかった。方程式は、線形であるのでこれらの関数の線形結合

$$A_+e^{i\omega t} + A_-e^{-i\omega t} \tag{9.17}$$

もやはり解となっている。係数が、

$$A_+ = |A|e^{i\alpha}, A_- = |A|e^{-i\alpha} \tag{9.18}$$

であるとき、線形結合は、解 (9.8) に一致する。

9.3　抵抗のある振動

振動子が空気中や水中で運動しているとき、空気や水からの抵抗が働く。空気中では抵抗は小さいが、水中では抵抗は大きい。抵抗は保存力ではないため、空気中や水中では、力学的エネルギーは保存しない。このため、運動は周期運動からずれる。抵抗は、通常速さに比

例することが知られてい、進行方向と逆にむいている。だから、c を正の実数として、運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t) - c\frac{d}{dt}x(t) \tag{9.19}$$

で記述される。

運動方程式 (9.19) の解として、γ を未定定数とした指数関数

$$x(t) = Ae^{\gamma t} \tag{9.20}$$

を仮定する。これを方程式 (9.19) に代入すると、γ の 2 次代数式

$$m\gamma^2 + k + c\gamma = 0 \tag{9.21}$$

となる。よって、未定の定数 γ が、

$$\gamma = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{9.22}$$

となり実数部と虚数部をもつ複素数となる。

ここで、抵抗の大きさを決める係数 c の大小で運動は異なる。係数 c が小さい値の時、

$$\gamma = \frac{-c}{2m} \pm i\omega', \omega' = \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{9.23}$$

となり、根は小さな虚数部を持つ。この時、解は振幅が時間とともに減衰する振動

$$x(t) = Ae^{-\frac{c}{2m}t}e^{\pm i\omega t} \tag{9.24}$$

となる。単純な振動子が、無限の時間を経た後も同じ周期と同じ振幅で運動を繰り返すのとは異なり、抵抗のある時の振動子は、振動が徐々に減衰する減衰振動である。この場合、振幅は時間と共に減衰するが、周期は一定に保たれている。十分時間を経た後では、運動はとまる。振動子が静止するまでの時間は、ほぼ $\frac{2m}{c}$ であり、c が小さいと減衰はゆっくりである。

次に c が大きい値であるとき、2 次式は二つの負の実根

$$\gamma = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = c\frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mk}{c^2}}}{2m} \tag{9.25}$$

を持つ。二つの根は、

$$\gamma_1 = -\frac{c}{m}, \gamma_2 = -\frac{k}{m} \tag{9.26}$$

となり、一つは絶対値が大きく、他は絶対値が小さい。いずれも、虚数部は零であるので、関数は振動しないで一様に減衰する。例えば、空気中では抵抗は小さいのでゆっくりと減衰

する振動であるが、水中では抵抗は大きいので、一様な減衰運動となる。これらは、図のような振る舞いである。

9.4　強制振動

周期的な外力が働く振動子の運動は、

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t)+kx(t)=f\cos\gamma t \tag{9.27}$$

で記述される。ここで、右辺が周期的な外力を表し、γ が外力の角速度であり、f が外力の振幅である。外力がなければ、振動子は固有の角速度 $\gamma_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ で振動する。解として、外力の振動と同じ振動数の関数

$$x(t)=A\cos\gamma t \tag{9.28}$$

を仮定してみよう。これを、方程式に代入して、

$$(-m\gamma^2+k)A\cos\gamma t=f\cos\gamma t \tag{9.29}$$

を得る。この式は、振幅 A に対する条件式となり、振幅が

$$A=\frac{f}{-m\gamma^2+k} \tag{9.30}$$

と決定される。だから、解は、

$$x(t)=\frac{f}{-m\gamma^2+k}\cos\gamma t=\frac{f/m}{\gamma_0^2-\gamma^2}\cos\gamma t \tag{9.31}$$

である。分母が、零にならない限り、この関数が解である。

振幅は外力の角速度 γ の関数である。つまり角速度を変えると、振幅は変化し、$\gamma\to\gamma_0$ で発散する。分母が零になる時の関数を求めるのは、工夫を要する。この場合、右辺は $1/0$

の関数形なので、関数が発散して定義できないように見える。しかしながら、$\gamma \to \gamma_0$ の極限で定義する関数があることが分かる。この極限で、右辺の関数は

$$x(t) = lim_{\gamma \to \gamma_0} \frac{f}{-m\gamma^2 + k} \cos \gamma t \tag{9.32}$$
$$= lim_{\gamma \to \gamma_0} \frac{f}{\frac{\partial}{\partial \gamma}(-m\gamma^2 + k)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \cos \gamma t$$
$$= \frac{f}{2m\gamma_0} t \sin \gamma t$$

となる。最終的に得られた関数は、単純な三角関数ではない。関数は、$t \sin \gamma t$ であり、時間 t に比例した振幅をもつ振動となる。振幅が、時間に比例して増大し、無限に大きな t では、振幅は発散する。この場合を、共鳴 という。共鳴 では、外部からの力の振幅が小さくとも、十分時間が経過した後では、振幅は無限大になってしまう。

9.5 多重振動

振動子が一つではなく沢山ある場合で、多くの振動子 $x_i(t)$ がそれぞれ独立な方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) = k_i x_i(t), i = 1, N \tag{9.33}$$

に従う時は、運動を求めるのはやさしい。各振動子に働く力が、この振動子の変位だけで決まる場合が、この状況である。それぞれの方程式の解は、簡単に

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i) \tag{9.34}$$

と求まる。定数 A_i, α_i は、この変数の初期条件から決まる。

9.5.1 連結ばね

多くの振動子 $x_i(t)$ が結合して、i 番目の振動子に働く力が i とは異なる振動子の位置に依存する方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) = -k(x_i(t) - x_{i-1}(t)) - k(x_i(t) - x_{i+1}(t)), i = 1, N \tag{9.35}$$

に従う時は、運動方程式は、連立方程式となる。連立方程式の解を求めるのは容易ではない。

いま特殊解として、すべての振動子がひとつの振動数 ω で振動する形

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t), i = 1, N \tag{9.36}$$

を仮定してみよう。これらを、N この方程式に代入して、

$$
\begin{aligned}
-mA_i\omega^2\cos(\omega t) = & - k(A_i\cos(\omega t) - A_{i-1}\cos(\omega t)) \\
& - k(A_i\cos(\omega t) - A_{i+1}\cos(\omega t)), i = 1, N
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

が得られる。振動部分は共通なので、振幅と振動数に関する１次連立方程式

$$
-mA_i\omega^2 = -k(A_i - A_{i-1}) - k(A_i - A_{i+1}), i = 1, N
$$

に帰着される。この一次連立方程式の解は、係数 A_i がすべてゼロになる場合と、すべてがゼロになるわけではない場合に分類される。前者では、係数行列式がゼロではなく、後者では、係数行列式がゼロである。また後者の条件を満たすのは、振動数 ω が、ある特定の値のときに限られる。これを、固有振動数という。

9.6 問題

9.6.1 単振子

振動数

9.6.2 抵抗と単振子

空気抵抗を受けて振動する

9.6.3 強制振動

振動子に外部から強制的に

9.6.4 ２重バネ

図のような二つのバネを連結

9.6.5 多重連結バネ

第10章　波動

10.1　波動

連続的な媒質の運動を考察する。連続的な媒質の各部分は、他の部分からの影響を受けながら運動する。全体が静止している時、媒質は安定に保たれ、運動は生じない。しかし、媒質の一部がもとの場所から変位すると、一部の変位が、媒質を伝播する。媒質の各部分は、互いに力を及ぼしあい、丁度、互いに連結した多くの振動子の集まりのようにふるまう。だから、媒質の一部が振動すると、振動が次々に隣りの部分に伝わり媒質全体が振動することとなる。これを波動という。これら空間全体が振動する波動を以下調べる。波動では、空間の任意の位置で媒質が時間とともに振動している。

波動では、変位が、空間や時間の関数として変化している。波動の一つの例は、空間座標 x と時間 t の正弦関数

$$h(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{10.1}$$

である。これは、一定の x で時間について

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}h(x,t) = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx) \tag{10.2}$$

$$= -\omega^2 h(x,t) \tag{10.3}$$

と振動子の方程式を満たすと共に、空間についても

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}h(x,t) = -k^2 A\cos(\omega t - kx) \tag{10.4}$$

$$= -k^2 h(x,t) \tag{10.5}$$

と振動している。位置と時間の関数として、位相が一定のところは、

$$\begin{aligned} \omega t - kx &= \alpha \\ x &= \frac{\omega}{k}t + \alpha' \\ v &= \frac{\omega}{k} \end{aligned} \tag{10.6}$$

で与えられる。つまり、位置が時刻に比例して変化し、その比例係数である速度が v である。

この関数は、時間と空間に関する２階の偏微分方程式（ 波動方程式）

$$[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}]h(x,t) = -k^2(1-(\frac{\omega}{vk})^2)h(x,t) = 0 \tag{10.7}$$

にしたがっている。この偏微分方程式を、波動方程式という。

10.2 波動のパラメーター

波動

$$h(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{10.8}$$

で、A は振幅、つまり振動の大きさであり、$\frac{\omega}{2\pi}$ は単位時間当たりの振動の回数である振動数である。また、$\frac{2\pi}{\omega}$ は周期、すなわち震動が基に戻るまでの最少時間であり、$v = \frac{\omega}{k}$ は波の速さであり、$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ は波長、すなわち空間的に基に戻るまでの距離である。周期を T 波長を λ とすると、これらは、

$$h(x+\lambda, t) = h(x,t) = h(x, t+T) \tag{10.9}$$

を満たす。

10.3 波動の重ね合わせ

二つの波 $h_1(x,t)$ と $h_2(x,t)$ が、同時に同じ場所にある場合、二つの波を重ね合せることができる。つまり、二つの波の和

$$h(x,t) = h_1(x,t) + h_2(x,t) \tag{10.10}$$
$$h_1 = A_1\cos(\omega_1 t - k_1 x), h_2 = A_2\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

が、やはり同じ場所の波となれる。このように、もとの複数の波を重ね合わせてできた新たな波が、同じ方程式の解となっている。これを、重ね合わせの原理が成り立つという。重ね合わせの原理は、多くの波動現象に共通に成立する。質点が従うニュートンの運動方程式は、加速度が力から決まる式であり、力が変位に比例する場合を除いて、重ね合わせの原理を満たさない。振動子では、力が変位に比例し例外的に重ね合わせの原理を満たしている。ところが波動現象では、いつも重ね合わせの原理が満たされる。

波に固有な、干渉、回折、屈折、等の諸現象は、重ね合わせの原理から導くことができる。

10.3.1 干渉

干渉は、波動現象が示す特徴的な現象である。そのため、波動現象を直接的に確認するのによく使われる。しかも、一見複雑でありながら、波の特徴を使う簡単な説明が可能である。波動に特徴的な、振幅や位相によって多様な変化が生ずる点でも、興味深い。

平面波のような二つの一様な波を重ね合わせて合成された波は、多くの場合一様ではなく、空間や時間的に変化する。たとえば、以下の二つの波

$$h_1(t,x) = A\cos(\omega t_1 - k_1 x) \tag{10.11}$$

$$h_2(t,x) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \theta) \quad \text{￥のぬmべ r} \tag{10.12}$$

の和

$$h(t,x) = h_1(t,x) + h_2(t,x) \tag{10.13}$$

は、θ の値によって

$$\begin{aligned} &\theta = 0; h(t,x) = 2h_1(t,x) \\ &\theta = \pi; h(t,x) = 0 \\ &\theta = 2\pi; h(t,x) = 2h_1(t,x) \end{aligned} \tag{10.14}$$

と大きく変わる。このようにパラメター θ を変えた波がまったく異なる波になる事が、干渉の例である。干渉を示すことが確認できれば、波動といえる。

10.4 波動の諸現象

10.4.1 ドップラー効果

音源や観測者が、媒質に対して相対的に運動するとき、振動数が変化して聞こえる。音源が運動して観測者に近づくか、観測者が運動して音源に近づく時、これらが静止した場合よりも、高い音が聞こえる。

音源が速さ v_s で運動する場合では、図のように波長が

$$\lambda' = \frac{(c - v_s)t}{f_s t} = \frac{(c - v_s)}{f_s} \tag{10.15}$$

となる。ここで、定数は $\lambda =$ 波長、$c =$ 音速、$v_s =$ 音源の速さ、$f_s =$ 振動数 である。

さらに観測者の運動が加わる場合、

$$f_l = \frac{(c+v_L)}{\lambda'} = \frac{(c+v_L)}{c-v_s} f_s \tag{10.16}$$

となる。ここで、$c =$ 音速、$v_L =$ 観測者の速さ、$f_s =$ 振動数 である。

10.4.2 分散

物質中の光の速さは、屈折率に反比例して小さく $\frac{c}{n}$ となる。また、屈折率は、振動数（波長）によって異なる。そのため、物質中における光の速さは、振動数（波長）によって異なる。この結果、物質中を通過した光は、波長ごとに異なる屈折角で屈折する。これを光の分散現象という。光の分散現象が観測されるのは、たくさんの波長の波を含む光が、物質によって屈折された時である。すべての色の波長を含む光は、白色光である。それぞれの色が分離しないで混合しているため、白色光には色は見えない。しかし、白色光が物質で屈折すると、異なる色の光が、波長（色）で異なる屈折率を持つため、異なる角度に進む。そのため、それぞれの方向ごとに異なる色が強められ、異なった色に見える。

虹が、分散の代表的な現象である。空気中には、沢山の微小な分子が浮遊している。その一つが、水である。空気中に浮遊した小さな球状の水滴により、太陽光が、屈折したとき、虹ができる。水による光の屈折率は、である。このため、

10.4.3　うなり

振動数の近い二つの波を重あわせると、合成波は振幅がゆっくり時間変化する。これが、唸りである。振動数が微小量 $\delta\omega$ だけずれた二つの波の和は、

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) + A\cos((\omega+\delta\omega)t) \qquad (10.17)\\ &= A(\cos(\omega t)+\cos(\omega t)\cos(\delta\omega t) - \sin(\omega t)\sin(\delta\omega t))\\ &= A(1+\cos(\delta\omega t))\cos(\omega t) - A\sin(\delta\omega t)\sin(\omega t)\\ &= B(t)\cos(\omega t + \alpha(t)) \end{aligned}$$

とまとめられる。ここで、振幅 $B(t)$ と位相 $\alpha(t)$ は、時間とともにゆっくり変化し、

$$\begin{aligned} B(t) &= A\sqrt{(1+\cos\delta\omega t)^2 + \sin(\delta\omega t)^2} \qquad (10.18)\\ \tan\alpha(t) &= \frac{\sin\delta\omega t}{1+\cos\delta\omega t} \end{aligned}$$

となる。

これらは、さらに

$$\begin{aligned} B(t) &= A\sqrt{4\cos\frac{\delta\omega t}{2}^2} = 2A\cos\frac{\delta\omega t}{2} \qquad (10.19)\\ \tan\alpha(t) &= \tan\frac{\delta\omega t}{2} \end{aligned}$$

となる。二つの合成波は、振幅と位相が振動数 $\omega/2$ でゆっくり変動する波である。

10.4.4　衝撃波

媒質中で物体が波の波源となりながら波の速さよりも速く運動するとき、物体が作る波が同じ位相で重ね合わされ、強められる事がある。そのとき、非常に強い合成波が作られる。この波を衝撃波という。超音速の飛行物体が空気中で作る波や、物質中で超光速物体が作るチェレンコフ光が、これらの例である。

図のように、波が一方向に進む時、各瞬間に一つの波が作られる。仮に、波の伝播の速さが、物体の進む速さより速いとして、ある時刻で、波の全体をみることにする。この場合、先に作られた波は、後で作られた波より大きな半径の球面に達している。また、物体の進む速さが波の速さより遅いので、これらの球面が、たがいに重なることはなく、合成波は、各波と同じ振幅である。ところが、波の伝播の速さよりも、大きな速さで物体が運動する場合、逆転現象が生ずる。先に作られた波は、後で作られた波より大きな半径の球面に達しているが、進行方向では波源の運動のため、後で作られた波のほうが先に達する。適当な方向では、先に作られた波と、後で作られた波が丁度重なる。そのため、この方向では、合成波が特別大きな強度を持つ。これらの球面波の包絡線の方向が、波が強めあう方向である。音波の速さは、空気中でほぼ毎秒３００ｍであるので、これより速い物体、すなわち超音速の物体が空気中を運動するとき、空気の衝撃波が生じる。これは、超音速の飛行機や、弾丸で実際に起きる。また、真空中の光より早い物体は存在しないため、真空中で光の衝撃波が生ずることはない。しかし、物質中で光は、屈折率の逆数の速さで遅くなる。そのため、物質中で光の衝撃波、これはチェレンコフ光と呼ばれる、が物質中では作られる。例えば、水の屈折率 n は、　　であり、$\frac{c}{n}$ より速く動く物体は、チェレンコフ光を発する。水中で、電子が高速で運動するとき発するチェレンコフ光を使う測定器が現在稼働している。この測定器は、ニュートリノの反応や、陽子の崩壊等の稀に起こる反応を観測するのに威力を発揮している。

10.5 問題

10.5.1 平面波

10.5.2 干渉

10.5.3 ドップラー効果

観測者が速度

10.5.4　分散

波長によって、屈折率

10.5.5　うなり

振動数がわずかに異なる二つの波の和

10.5.6　衝撃波

問題

1.

長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。

加速度、力、仕事、エネルギー、運動量、ばね定数、周期、振動数、波長重力加速度、万有引力定数

解答

加速度:$[=\frac{d^2x(t)}{dt^2}]=LT^{-2}$、

力:$=m\frac{d^2}{dt^2}x[=LT^{-2}M]$、

仕事:、$=d\vec{l}\cdot\vec{F}[L^2T^{-2}M]$

エネルギー:、$L^2T^{-2}M$

運動量:、$LT^{-1}M$

ばね定数:、$[F/x=T^{-2}M]$

周期:、T

振動数:、T^{-1}

波長:,L

重力加速度:、LT^{-2}

万有引力定数: $[F]L^2M^{-2}=L^3T^{-2}M^{-1}$

2.

（１）運動に関するニュートンの３法則を説明せよ。

次に、３法則から

（２） 質量 M_1 と質量 M_2 を一緒にした物体の質量は、M_1+M_2 であること。

（３）一定の力が働いている時の物体の運動は、等加速度運動であること。

を示せ。この時、物体の位置は時間の如何なる関数であるか？

解答（１）本文参照

（２）二つの物体（ 質量 M_1, M_2）を接して、片方に力 $\vec{F}$ を加えて両物体を一緒に運動させた。両物体の間に働く力を $\vec{f}$ とすると、第２法則の運動方程式と第３法則の作用 · 反作用の法則から、

$$M_1\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)=\vec{F}-\vec{f} \tag{10.20}$$

$$M_2\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)=+\vec{f} \tag{10.21}$$

が成り立つ。両辺を足して、

$$(M_1+M_2)\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t)=\vec{F} \tag{10.22}$$

が得られる。この等式から、二つが一緒に運動するときの質量は、それぞれの質量の和である。

(3) 略。本文参照

3.

（1）一定の速度 $\vec{v}_0$ で運動していた質量 M の物体に、ある力が作用した結果速度が変化した。力が物体にした仕事と、物体の最終速度 $\vec{v}_1$ との間に成立する関係式を求めよ。

4.

一次元単振動運動についての以下の問題に答えよ。

(1) 質量を M とする質点に、 変位 $x(t)$ に比例する引力が働く場合の運動方程式を書き下せ。

(2) (1) の運動方程式の解を求めよ。周期や振動数はどのように表されるか？

５.

（1）静止していた質量 M の物体に、ある力が作用した結果速度の大きさが v となった。力が物体にした仕事と、物体の速さ v との間に成立する関係式を求めよ。

６.

一次元単振動運動についての以下の問題に答えよ。

(1) 質量を M とする質点に、 バネ定数 k の変位に比例する引力が働く場合の運動方程式を書き下せ。

(2) (1) の運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ での初期条件 $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$ を満たす解を求めよ。

７.

一次元上の運動を考えよう。速さ v_0 で運動していた質量 M の物体に、力が働いた結果速さが v_1 となった。この間に、力が物体にした仕事と、物体の速さとの間には如何なる関係式が成立するか？

８.

光が波であることを示す現象を二つあげ、内容を詳しく説明せよ。

９.

静止していた質量 M の質点に、ある一定の力 $\vec{F}$ が作用した結果、速度の大きさが v となった。

（１）この場合の運動方程式を表せ。

（２）次に運動方程式をとき、質点の位置と速度が時間と共に、どのように変化するかを求めよ。

（３）最後に、力が物体にした仕事をもとめ、この仕事と物体の速さ v との間に成立する関係式を求めよ。

１０.

一次元単振動についての以下の問題に答えよ。

(１) 質量 M の質点に、 バネ定数 k の変位に比例する引力が働く場合の運動方程式を書き下せ。

(２) (１) の運動方程式の解で、時刻 $t=0$ での初期条件 $x(0)=A, \dot{x}(0)=0$ を満たす運動の振幅と周期を求めよ。また、運動エネルギー $\frac{M}{2}\vec{v}^2$ と位置エネルギー $\frac{k}{2}\vec{x}^2$ を求め、和が一定であることを示せ。

１１.

静止していた質量 $2M$ の質点に、ある一定の力 $\vec{F}$ が作用した結果、速度の大きさが v となった。

（１）この場合の運動方程式を表せ。

（２）次に運動方程式をとき、質点の位置と速度が時間と共に、どのように変化するかを求めよ。

（３）最後に、力が物体にした仕事をもとめ、この仕事と物体の速さ v との間に成立する関係式を求めよ。

12.

力の性質と、保存量の間の以下の関係式を示せ。

（１）力のする仕事が、その経路によらないような力を保存力という。保存力では、力学的エネルギーが時間によらない定数であることをしめせ。

（２）中心力では、角運動量が保存されることを示せ。

13.

（１）ケプラーの３法則は、

(i) 惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である。

(ii) 太陽から一つの惑星に引いた動径の描く面積速度は一定である。

(iii) 諸惑星の公転の周期の二乗は、惑星の長軸の３乗に比例する。

である。

ケプラーの法則について、万有引力の法則と運動の法則にもとずいて議論せよ。

ただし、万有引力の法則は、「二つの物体の間には、距離の 2 乗に反比例しそれらの質量に比例する大きさをもち二つを結ぶ方向に引力が働く」と述べる。また、 2 次元極座標 r, θ における運動エネルギーとこの xy-面内の角運動量

$$
\begin{aligned}
&E_{\text{運動}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\
&M_z = mr^2\dot{\theta} \\
&\dot{r} = \frac{d}{dt}r(t), \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(t)
\end{aligned}
$$

を使ってもよい。

基礎物理学　豆テスト問題

1.
長さ L、時間 T、 質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。
加速度、力、仕事、エネルギー、運動量、
2.
（１）運動に関するニュートンの３法則を説明せよ。
次に、３法則から
（２） 質量 M_1 と質量 M_2 を一緒にした物体の質量は、$M_1 + M_2$ であること。
（３）一定の力が働いている時の物体の運動は、等加速度運動であること。
を示せ。この時、物体の位置は時間の如何なる関数であるか？

基礎物理学クラスレポート

1.
長さ４枚以内で、レポートをまとめ、 レポートボックスに提出せよ。
題：各自できめる
締め切り：２月１６日（ 月）

基礎物理学　テスト問題

1.

（1）運動に関するニュートンの３法則を説明せよ。

次に、運動の３法則から

（2） 質量 M_1 と質量 M_2 を一緒にした物体の質量は、$M_1 + M_2$ であること。

（3）一定の力が z 軸方向に働いている時の物体の運動を明らかにして、位置と速度についての初期条件、

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0$$
$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

を満たす解の任意の時刻 t における位置 $\vec{x}(t)$ を求めよ。ただし、$\vec{x}_0, \vec{v}_0$ は一定のベクトルである。

２.

力の性質と、保存量の間の以下の関係式を示せ。

（1）力のする仕事が、その経路によらないような力を保存力という。保存力では、力学的エネルギーが時間によらない定数であることをしめせ。

（2）中心力では、角運動量が保存されることを示せ。

３.

（1）ケプラーの３法則は、

(i) 惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である。

(ii) 太陽から一つの惑星に引いた動径の描く面積速度は一定である。

(iii) 諸惑星の公転の周期の二乗は、惑星の長軸の 3 乗に比例する。

である。

ケプラーの法則について、万有引力の法則と運動の法則にもとずいて議論せよ。

ただし、万有引力の法則は、「二つの物体の間には、距離の２乗に反比例しそれらの質量に比例する大きさをもち二つを結ぶ方向に引力が働く」と述べる。また、２次元極座標 r, θ における運動エネルギーとこの xy-面内の角運動量

$$E_{\text{運動}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$M_z = mr^2\dot{\theta}$$
$$\dot{r} = \frac{d}{dt}r(t), \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

を使ってもよい。

基礎物理学　テスト問題

1.

（1）運動に関するニュートンの３法則を出来るだけ丁寧に説明せよ。

次に、運動の３法則を使い以下の問いに答えよ。

（2） 物体の１次元上の運動で、ある力を加えた時、質量 M_1 の物体は加速度 a_1 を得、質量 M_2 の物体は加速度 a_2 を得た。同じ力を、両物体を合体させた物体に加えた時、生ずる加速度いくらか？

（3）なめらかな氷の上にある物体に一定の力をある短い時間加えた。その後、物体は力を受けずにそのまま進んだ。次に、力を与える時間を２倍にしたとき、最終の速さは何倍になるか？

２.

力の性質と、保存量の間の以下の関係式を示せ。

（1）力のする仕事が、その経路によらないような力を保存力という。保存力では、力 $\vec{F}$ の各成分は、座標のある関数 $U(x,y,z)$ で

$$\vec{F} = -(\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z)) \tag{10.23}$$

とあらわせる。このとき、力学的エネルギーが時間によらない定数であることをしめせ。

３.

（1）ケプラーの３法則は、

(i) 惑星の軌道は太陽を一つの焦点とする楕円である。

(ii) 太陽から一つの惑星に引いた動径の描く面積速度は一定である。

(iii) 諸惑星の公転の周期の二乗は、惑星の長軸の３乗に比例する。

である。

ケプラーの３法則について、万有引力の法則と運動の法則にもとずいて議論せよ。

ただし、万有引力の法則は、「二つの物体の間には、距離の２乗に反比例しそれらの質量に比例する大きさをもち二つを結ぶ方向に引力が働く」である。また、２次元極座標 r, θ における運動エネルギーとこの xy-面内の角運動量は

$$E_{運動} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$
$$M_z = mr^2\dot{\theta}$$
$$\dot{r} = \frac{d}{dt}r(t), \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

となることを使ってもよい。

第11章　付録

11.1　平均値の定理

関数の微分に関する平均値の定理は、関数に関する基本的な定理であり、ロールの定理から導かれる。

11.1.1　ロールの定理

連続で微分可能な関数（微分係数が、いつも定義できる関数）$f(x)$ で、$a < b$ となる変数 $x = a$ と $x = b$ で、

$$f(a) = f(b) = 0 \tag{11.1}$$

となるとき、ある $x = c$ で関数の微分係数が零になり、

$$f^{'}(c) = 0, a < c < b \tag{11.2}$$

を満たす。

(証明)

いま、$x = c$ で関数が最大になるとする。微分係数を、右極限値と左極限値で計算し、

$$f'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \tag{11.3}$$

$$f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \tag{11.4}$$

となる。これらが、一致するので、

$$f^{'}(c) = 0 \tag{11.5}$$

である。

11.1.2　平均値の定理

微分可能な関数 $f(x)$ に対して、関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - f(a) - k(x-a), k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{11.6}$$

と定義する。この関数は、

$$g(a) = 0, g(b) = 0 \tag{11.7}$$

を満たすので、ロールの定理より、

$$g^{'}(c) = 0, a < c < b \tag{11.8}$$

となる c が a と b の間に必ずある。よって、

$$g^{'}(c) = f^{'}(c) - k = 0 \tag{11.9}$$

となり、この c で、微分係数は、平均変化率に一致する。

$$f^{'}(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{11.10}$$

よって、平均値の定理が成立する。

11.1.3　テイラー展開

積分の部分積分を繰り返すことにより関係式、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \qquad (11.11)\\
&= \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n|_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^n(t)(x-t)^{n-1}dt\\
&= -\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^n(t)(x-t)^{n-1}dt\\
&= \cdots\\
&= -\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} - \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a)(x-a)^{(n-2)} + \cdots\\
&+f(x) - f(a) \qquad (11.12)
\end{aligned}$$

が導かれる。よって関数 $f(x)$ を左辺に移項して、テイラー展開

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{'}(a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(a)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \tag{11.13}$$

が得られる。

11.2 逆関数

関数 $f(x)$ により

$$y = f(x) \tag{11.14}$$

と、一つの x から一つの y が決定されるとしよう。これは、関数 f で x を y に写す（写像する）関係である。ここで、この両者の関係を、逆に一つの y から一つの x への関係とみることもできる。この時、

$$x = f^{-1}(y) \tag{11.15}$$

と表わし、これを逆関数という。変数 x と y を入れ替えた場合、

$$y = f^{-1}(x) \tag{11.16}$$

は

$$x = f(y) \tag{11.17}$$

のことである。逆関数は、恒等式

$$x = f^{-1}(f(x)) \tag{11.18}$$
$$x = f(f^{-1}(x)) \tag{11.19}$$

を満たしている。

11.2.1 逆関数の例

例 1

$$y = x^2 \tag{11.20}$$

x について解いて、

$$x = \pm\sqrt{y} \tag{11.21}$$

と、なる。二つの値をとるが、$x^{1/2}$ が逆関数である。これらは、関係式

$$(\pm\sqrt{x})^2 = x \tag{11.22}$$
$$\sqrt{(x^2)} = x \tag{11.23}$$

を満たしている。
　例 2 指数関数

$$y = e^x \tag{11.24}$$

の場合、

$$x = \log y \tag{11.25}$$

と書いて、指数関数の逆関数を対数関数と呼ぶ。これらは、

$$e^{logx} = \log e^x = x \tag{11.26}$$

を満たしている。
　例 3 三角関数

$$y = \sin x \tag{11.27}$$

では、特殊の名前はないので、上の式を

$$x = sin^{-1} y \tag{11.28}$$

とかく。これらは、

$$sin(sin^{-1}(x)) = x \tag{11.29}$$
$$sin^{-1}(sin(x)) = x \tag{11.30}$$

を満たしている。

11.2.2　逆関数の微分

　逆関数の微分を求める。

$$y = f^{-1}(x) \tag{11.31}$$

の定義、

$$x = f(y) \tag{11.32}$$

の両辺を x で微分して

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(y) = f^{'}(y) \frac{dy}{dx} \tag{11.33}$$

となる。よって y の微分は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}|_{y=f^{-1}(x)} \tag{11.34}$$

で与えられる。

$$y = \log x \tag{11.35}$$

では、

$$x = e^y \tag{11.36}$$

$$1 = e^y \frac{dy}{dx} \tag{11.37}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \tag{11.38}$$

となる。

$$y = \sin^{-1} x \tag{11.39}$$

では、

$$x = \sin y \tag{11.40}$$

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \tag{11.41}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \tag{11.42}$$

となる。

問題

1

長さ L、時間 T、と質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。

面積、体積、速度、加速度、周期、振動数、波長、重力加速度、角運動量、仕事、エネルギー、力

2

ニュートンの運動の３法則を説明せよ。

3

位置座標が次の式で与えられる質量mの質点の、速度と加速度をもとめよ。また、これらの運動の特徴を説明し、質点に加わる力を求めよ。

$$\mathbf{x}^1(t) = (1, t + 3t^2, 4t),$$
$$\mathbf{x}^2(t) = (5\sin 2t, 5\cos 2t, 0),$$

4 雨粒の落下運動

質量 m の雨粒は、空気中で重力と空気抵抗を受けて落下する。空気抵抗は、運動の方向とは逆の向きであり、大きさは速さに比例する。重力加速度を g 、空気抵抗を $-cv$、$c > 0$ として、この雨粒の落下運動をしらべよ。

5 惑星の運動と万有引力の法則

質量 m を持つ惑星が、太陽から働く万有引力の影響で、太陽の周りを運動している。万有引力は、中心力であるので、惑星は一つの平面内で運動する。

（１）これは、なぜか？

次に、この面内に太陽を中心にする２次元極座標 (r, θ) をとり、次の設問に答えよ。

（２）エネルギーと角運動量を２次元極座標 (r,θ) で表わせ。

（３）エネルギーを変数 $r(t)$ と $\frac{d}{dt}r(t)$ だけで表わせ。

（４）ケプラーの法則が成立することを示せ。

問題

1

長さ L、時間 T、と質量 M を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。

面積、速度、加速度、周期、振動数、重力加速度、運動量、角運動量、仕事、エネルギー、力

2

ニュートンの運動の３法則を詳しく説明せよ。

3

時刻 t における位置座標が次の式で与えられる質量mの質点の、速度と加速度をもとめよ。また、これらの運動の特徴を説明し、質点に加わる力を求めよ。

$$\mathbf{x}^1(t) = (t, t, 4t + 4.9t^2),$$
$$\mathbf{x}^2(t) = (5\sin t, 5\cos t, 0),$$

4 雨粒の落下運動

質量 m の雨粒は、空気中で重力と空気抵抗を受けて落下する。空気抵抗は、運動の方向とは逆の向きであり、大きさは速さに比例する。重力加速度を g 、空気抵抗を $-cv$、$c > 0$ として、

(1) この雨粒の運動方程式を書きくだせ。

（２）運動方程式をとけ。

5 惑星の運動と万有引力の法則

質量 m を持つ惑星が、太陽から働く万有引力の影響で、太陽の周りを運動している。万有引力は、中心力であるので、惑星は一つの平面内で運動する。

（１）中心力で保存する物理量は何か？運動方程式に基ずいて示すこと。

次に、この面内に太陽を中心にする２次元極座標 (r, θ) をとり、次の設問に答えよ。

（２）エネルギーと角運動量を２次元極座標 (r,θ) で表わせ。

（３）エネルギーを変数 $r(t)$ と $\frac{d}{dt}r(t)$ だけで表わし、$r(t)$ に関する微分方程式を導け。

（４）微分方程式に基ずいて、ケプラーの法則が成立することを示せ。

問題

1

長さ L と時間 T を基本単位として以下の物理量の次元を書き下せ。

速度、加速度、周期、振動数、波長、　重力加速度、面積、体積

2

次の関数の導関数を求めよ。ただし、a, b, c, d は定数とし、n は整数とする。

$$\sin ax, \cos bx, \exp(cx+d), \log x, x^n, \sin^{-1} x$$

ただし、最後の関数は、三角関数 $\sin x$ の逆関数である。

3

位置座標が次の式で与えられる点の、速度と加速度をもとめよ。また、これらの運動の特徴を説明せよ。

$$\mathbf{x}^1(t) = (1, t+3t^2, 4t),$$
$$\mathbf{x}^2(t) = (5\sin 2t, 5\cos 2t, 0),$$

4 テイラー展開

関数 $f^{p+1}(x)$ の積分は $f^p(x)$ である。部分積分を行うことにより、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n|_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^n(t)(x-t)^{n-1}dt\end{aligned} \tag{11.43}$$

を証明せよ。さらに同様な変形を繰り返し行い、これが

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} - \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a)(x-a)^{(n-2)} \\ &+\cdots+f(x)-f(a)\end{aligned} \tag{11.44}$$

と書けること（テイラー展開）を示せ。ただし、

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \tag{11.45}$$

である。

5

次の英文は、プリンキピアにおけるニュートンの第 2 法則である。これを訳せ。

[A change in motion is proportional to the motive force impressed and takes place along the straight line that force is impressed.]