3.　exp と sin, cos

目的：

微分方程式では，exp (e の指数関数)と sin(正弦関数), cos（余弦関数）は特別な地位を占める. なぜならこれらの関数のみが, 微分が自分自身になるからだ. つまり指数関数は一階微分して指数関数になるし，正弦・余弦関数は二階微分をするとそれぞれ正弦・余弦関数になる．本書を通じて繰り返し学ぶように，この性質からこれらの関数は常微分方程式と偏微分方程式で頻繁に登場する. また，これらの関数は，人類の至宝とも言われるオイラーの関係式

$$e^{x} = \cos x + i \sin x \tag{3.1}$$

が成り立つ．指数関数を正弦・余弦関数で表すこともその逆もできるので，exp と sin, cos とはあたかもコインの表と裏の関係にある．そこでこの章では，これらの関数の微分がそれ自身になることと，これらの関数の相互の関係を学ぶ.

3.1.　*exp* (と sin, cos)だけが微分が自分

指数関数 exp と，正弦関数 sin，余弦関数 cos が微分方程式で重要な役回りを果たすことを示す前に，ウォーミングアップをしよう.

練習問題 3.1 以下の微分を示せ．またそれぞれの場合で，微分される関数と，微分された結果とが比例関係を持つかどうかを述べよ．以下で a はすべて定数である.

a) $dx^{n}/dx =$

b) $de^{x}/dx =$

c) $d\sin x/dx =$

d) $d\cos x/dx =$

e) $d^{2}\sin x/dx^{2} =$

f) $d^{2}\cos x/dx^{2} =$

g) $de^{ax}/dx =$

h) $d\sin ax/dx =$

i) $d^{2}\sin ax/dx^{2} =$

この世に関数は数々あるが，微分される関数($f(x)$)と一階微分された結果($df(x)/dx$)とが比例関係にあるのは, 指数関数だけである. 二階微分の場合は, 指数関数だけでなく sin, cos もある．もっとも次節で見るように，sin, cos も指数関数だと思って差し支えないので，微分の結果が微分される関数に比例するのは sin, cos も含めた e だけだ．つまり，e は微分が自分なのだ.

e と sin, cos の微分が自分であることから，これらの関数は線形で定数係数の微分方程式の解となることと，密接に関係する．たとえば，表 3.1 に示す簡単な微分方程式は，左辺の微分と右辺の関数自体が同じ形をしていなければ，当然解を持ち得ない．つまり，微分が自分である関数しか，解にならないのだ．これらの関数よりもふつう簡単だと考えられる一次関数 $y=x$ や，二次関数 $y=x^2$ が微分方程式の解になることは，ずっと少ないのである．

表 3.1　簡単な１，２階の常微分方程式（１，２解線形斉次常微分方程式）とその解.

微分方程式	解
$\dfrac{dy}{dx}=ay$	$y=c_1e^{ax}$
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=b^2y$	$y=c_2e^{bx}+c_3\boxed{\quad}$
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-b^2y$	$y=c_4\cos bx+c_5\boxed{\quad}$ $=c_6\exp(+ibx)+c_7\boxed{\quad}$

練習問題 3.2　表 3.1 の解が，それぞれの微分方程式の解であることを確認しよう．

e（指数関数）そして指数関数と表裏一体の関係にある sin(正弦関数)・cos(余弦関数)は，常微分方程式でも偏微分方程式でも中心的な役割を果たす．これらの関数が，多くの微分方程式の解になるのだ．指数関数や三角関数よりも，ふつう簡単だと考えられる一次関数 $y=x$ や，二次関数 $y=x^2$ が微分方程式の解になることは，実際的な問題ではほとんどない．

3.2.　e=2.72...を求めてみよう.

前節では exp の微分が，それ自身になることを述べたが，逆に，微分がそれ自身になる指数関数 a^x の a を探してみよう．つまり，

$$\frac{de^x}{dx}=e^x \tag{3.2}$$

となる数値 e を求めるのだ．これを有限区間での変化である差分で近似すると，

$$\frac{e^{x+\Delta x}-e^{\Delta x}}{\Delta x}\approx e^x \tag{3.3}$$

となる．この式を両辺を e^x で割れば，簡単に $e^{\Delta x}$ について解くことができて，

$$e^{\Delta x}\approx\left(1+\Delta x\right)e^0=\left(1+\Delta x\right) \tag{3.4}$$

となる．したがって，Δ x=1 なら，$e^1 = e \approx (1+1) = 2.0$ である．これでは e=2.72...とあまり一致しない．近似の精度が悪いのだ．

近似の精度を高めるには，Δ t を小さくすればよい．たとえば，Δx= 1/2, 1/4, 1/8 とすればどんどん近似はよくなるはずだ．これを(3.4)に代入すると，それぞれ $e^{1/2}$, $e^{1/4}$, $e^{1/8}$ が得られる．それをさらに，それぞれ 2 乗，4 乗，8 乗してやれば，いずれも e^1 すなわち e が得られる．この二つの関係を一つの式で表すなら，

$$e = e^1 = (1+\Delta x)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n = \frac{1}{\Delta x}\ (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots) \tag{3.5}$$

となって，e の近似値を求めることができる．

(3.5)をΔ x=1, 1/2, 1/4, 1/8 の場合に求めて，有効数字 3 桁で書けば

Δ x =1: $e \approx (1+1)^1 = 2^1 = 2.0$

Δ x =1/2: $e \approx (1+0.5)^{1/0.5} = (1.5)^2 = \boxed{}$

Δ x =1/4: $e \approx (1+0.25)^{1/0.25} = (1.25)^4 = \boxed{}$

Δ x =1/8: $e = (1+0.125)^{1/0.125} = (1.125)^8 = \boxed{}$

が得られ，Δ x が小さくなると徐々に，正しい e の値である 2.7182818…に近づいていく．

3.3.　e と sin, cos は表裏一体

2 節前で予告した，exp と sin, cos とが，実はコインの表裏の関係にあることを説明しよう．この関係は，**オイラーの関係式**

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \tag{3.6}$$

で表される．

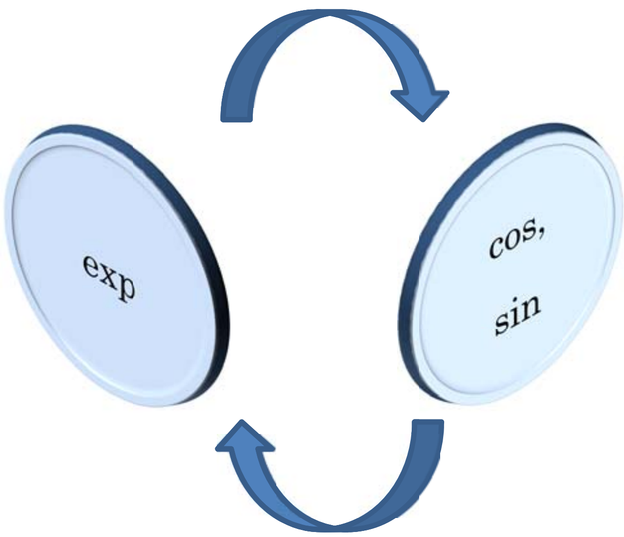

図 3.1　exp と sin, cos は表裏一体，コインの裏表である．

オイラーの関係式は，図に示すとわかりやすい．sin, cos は，ご存じの通り二次元平面上の半径 1 の円（単位円）を使って図 3.2a のように示される．この二次元平面を複素平面にすると，図 3.2b にあるようにオイラーの関係式はベクトルが指し示す円周上の一点が $e^{i\theta}$ であることを意味している．したがって，cos と sin をは $e^{i\theta}$ の実部と虚部でそれぞれ表すことができる．

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) \tag{3.7}$$

$$\sin\theta = \boxed{} \tag{3.8}$$

　また(3.6)から，

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{3.9}$$

が成り立つ．(3.6)+(3.9)および(3.6)–(3.9)の操作で，

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{3.10}$$

$$\sin\theta = \boxed{} \tag{3.11}$$

が得られる．このように cos, sin を，以下のように $e^{i\theta}$ で表すこともよくある．

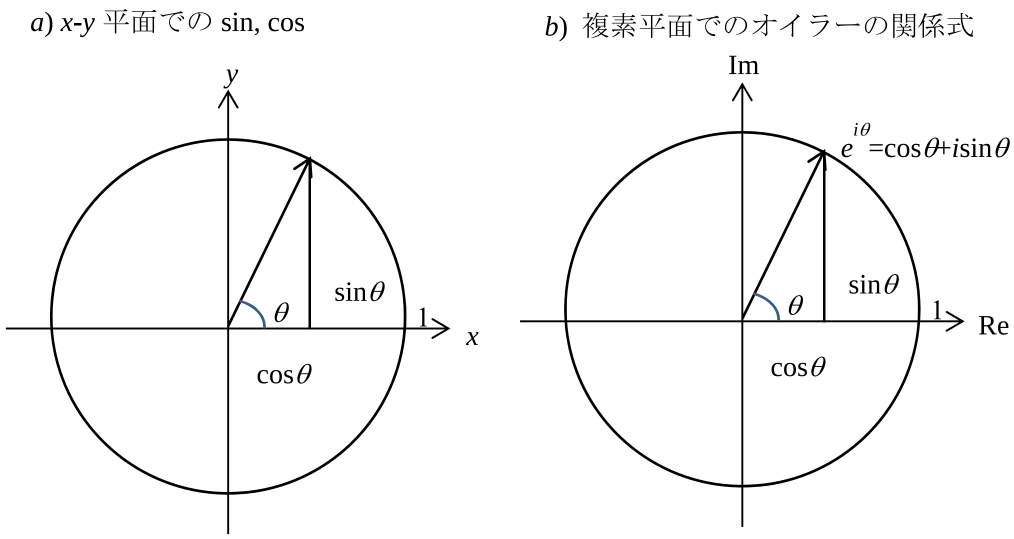

図 3.2. a)x-y 平面での sin, cos の関係と，b)オイラーの関係式の図示．

　オイラーの関係式を，ノーベル物理学賞を受賞したリチャード・ファイマンは，人類の至宝(jewel)，と呼んだ。オイラーの関係式の証明は何通りかあるが，よく使われるのがテイラー展開を用いる方法である．テイラー展開を振り返った上で，演習問題で証明を扱おう．

なお，オイラーの式で特に $\theta=\pi$ の場合は，オイラーの等式

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{3.12}$$

となる．この式は，世界で最も美しい式と言われている．自然対数の底 e，虚数単位 i，円周率 π，最も基本的な自然数 1，インドで発明された無の数 0 が，この一つの式で結びついているのだ.

3.4.　テーラー展開

オイラーの式の証明の定番は，(3.6)の左右両辺をテーラー展開という方法で表して一致することを示す．テーラー展開の考え方は，微分と密接に関係しているので，ここでかいつまんで説明しよう．より厳密には，複素関数論で学ぶ.

テーラー展開とは，微分を使って近似値を得る方法だ． $f(x)$ の $x=a$ における性質が分かっているとしよう．つまり，その関数の微分 $d^2f/dx^2(a)$ は計算できるのだ．この $x=a$ での微分係数を使って，a 以外での $f(x)$ の値の近似を求めよう.

一番簡単な近似は，一定だとみなすもので

$$f(x)=f(a),$$

となる．これではいい加減過ぎるからもう少し近似を上げたいというなら，直線で近似して

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{df}{dx}(a),$$

とすればいい．もっと近似を上げるには，曲率を表す２階微分も使えばいい．つまり２次方程式で近似するなら，

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{df}{dx}(a)+c(x-a)^2,$$

と書けるだろう．ただし c がいくつになるかはちょっと計算しないと分からない。

一番簡単な例は $f(x)=x^2$ で，これは $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2f}{dx^2}(x-0)^2$ と書けるので $c=\dfrac{1}{2}$ であり，

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{df}{dx}(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(a),$$

である．さらに３次式で近似すれば，

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{df}{dx}(a)+\frac{(x-a)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(a)+c(x-a)^3\frac{d^3f}{dx^3}(a), \tag{3.13}$$

とすることもできる。

練習問題 3.3 (3.13)の *c* がいくつになるか求めてみよう。

実は一般的に

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{3.14}$$

と書くことができて，これを**テーラー展開**という。テーラー展開は，物理の非常に広い範囲で使われる。

なお，f の 0 階微分は f 自身であり，$(x-a)^0=1,\ 0!=1$ である。

演習問題

演習問題 3.1 仮に

$$e^{ix}=A\cos(x)+Bi\sin(x) \tag{3.15}$$

が成り立つとしたら， A と B がいくつになるかを求めよ？ヒント：微分も使う。

演習問題 3.2 オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ をテーラー展開を用いて証明せよ。

演習問題 3.3 $e^{i(a+b)}=e^{ia}e^{ib}$ の左右両辺にそれぞれオイラーの公式を用いて，以下の加法定理を証明せよ.

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

なお，これら 2 式に b の代わりに$-b$ を入れれば

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

が容易に得られる.