2. 浅水方程式系の導出

見延　庄士郎（海洋気候物理学研究室）

授業終了時に，質問・感想・意見を対面参加者は紙で，オンライン参加者 はgoogle formsで提出してもらいます．google formsの提出期限は授業日の14:45までで，アドレスは https://forms.gle/tbXRvj7meRKUcwTd6 です．

本日の目的

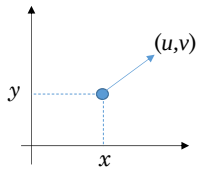
本授業の後のほうで，エルニーニョのメカニズムを議論したい．たとえば，概要は https://www.sci.hokudai.ac.jp/~minobe/elnino/ に解説がある．ただし，3年後期にふさわしい授業として扱うには，数式も必要である．そこで，

- [　　]を導出しよう．
- 方程式系は，[　　]で，系（＝システム）の挙動を記述できる[　　]
- 3つの式を導出する．そのうち二つは，東西方向と南北方向の[　　]で，もう一つの式は，これらの式で必要となる[　　]を与える式である．
- たった3つの式だが，大気海洋の気候力学で重要な流れと波の性質を深く学ぶことができる．

運動方程式の基本

- ニュートンの第一法則
  - 力 = 質量 × 加速度
- 大気や海洋に加わる力を，思いつくだけ挙げてみよう
  - [　]力，[　　]力，[　　]力，[　　]力
- 水平方向に働く力に下線をつけよう．
- したがって水平方向の運動方程式は
  - 質量×水平加速度=[　　]力 +[　　]力 +[　　]力
- 流体の運動方程式は単位体積について立てることにして，質量は密度 ρ で表される．

座標系と変数を導入



独立変数　[　　]: 東向き・北向き[　　]

[　]: [　　]

未知の従属変数[　　]: 東向き・北向き[　　]

[　]: [　　]

[　]: [　　] = 単位体積(1 m^3)当たりの[　　](kg)

コリオリ力のまとめのまとめ（復習資料から）

- 角速度Ω>0で回転する回転系で，速度|v|で運動する物体は，進行方向に向かって□向きに加速度□で加速するように見える．この時，物質の質量をmとすると，力□が働いたように見え，これを□力という．
- 地球の角速度ベクトルの，それぞれの地点での鉛直成分を2倍したものを，□といい，fで表す．地球の自転角速度をΩ(=2π/□周期)として，緯度θでのコリオリパラメータは，f = □である．
- コリオリ力以外の力が働かない場合に，回転系での運動方程式は，以下のとおりである．

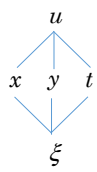
$$\frac{du}{dt}=\square \qquad \frac{dv}{dt}=\square$$

このページは予習課題と同一

du/dtと$\partial u/\partial t$ 1/2

- du/dt(ディーユー・ディーティー)は全微分または□微分と呼ばれる，運動につき従って測る微分である．
- 一方，$\partial u/\partial t$(デルユー・デルティー) は偏微分または□微分と呼ばれる．固定した地点で測る微分である．
- 両者の関係は，合成関数の偏微分で得られる．
- 一般に，$u(x,y,t)$, $x=x(\xi)$, $y=y(\xi)$, $t=t(\xi)$ であれば，合成関数の偏微分は，右の依存関係図より

$$\frac{du}{d\xi}=\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial y}$$



- である．ここで，$\xi=t$とすれば

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \square}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \square}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}$$

du/dtと$\partial u/\partial t$ 2/2

- 一つ前のスライドの $\frac{du}{dt}=\cancel{\frac{\partial t}{\partial t}}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}$
- で $\frac{\partial x}{\partial t}=\square$, $\frac{\partial y}{\partial t}=\square$ に他ならないので，上式は

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\square\frac{\partial u}{\partial x}+\square\frac{\partial u}{\partial y}$$

- とかける．同様に，

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\square\frac{\partial v}{\partial x}+\square\frac{\partial v}{\partial y}$$

- ただしこれら2式の，第二・三項は非線形で厄介なのと，また現象の振幅が小さいなら第一項よりも小さくなるので微小振幅 を仮定して $du/dt \approx \partial u/\partial t$ と近似(□)する．すると二つ前のスライドの下の，回転系での運動方程式は以下の通りとなる．

$$\square = fv \qquad \square = -f\,u$$

圧力傾度力のみが働く場合

- コリオリ力が働かず（慣性系），圧力傾度力のみが働く場合の，単位体積当たりの流体（空気または水）についての運動方程式は次のとおり．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=\square$$

- コリオリ力と圧力傾度力と摩擦力（文字のまま）が同時に働く場合は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+x\text{方向の摩擦力} \qquad (2.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\square+y\text{方向の摩擦力} \qquad (2.1b)$$

符号に注意

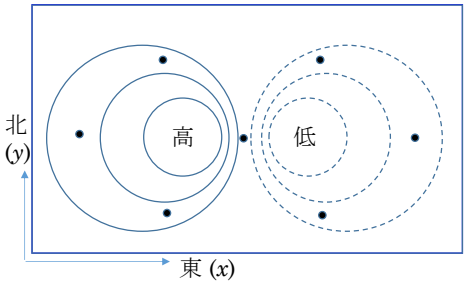
定常で摩擦力が働かない場合

- この場合の，運動方程式は次のとおり．

$$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2a) \qquad +fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2b)$$

- 2力のバランス（平衡）が成り立っており，その2力は，[　　]力と[　　]力である．
- このように吹く風を[　　]海の流れを[　　]という．

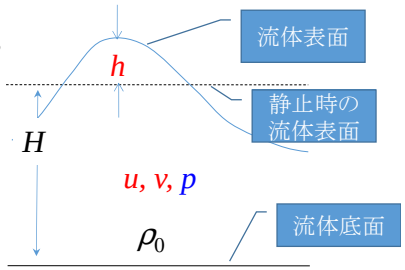
Q. 右の圧力場が与えられている．黒点における地衡風のベクトルを書き込め．ベクトルの長さで，速度を表す．



浅水方程式へ

式の数が[　]つで，未知変数の数が[　]つ．
→閉じていない
→式の数と未知変数の数が一致する，閉じた方程式を得たい．
→そのためには，簡素化が不可欠．
→密度が一定 ρ_0 である流体を仮定する．
密度が定数である流体を[　　]という．また，地球流体の場合，高さよりも水平方向のスケールがはるかに長いので，一層流体のモデルを[　]モデルという．

最後に残る従属変数，残らない従属変数，係数



- $h(x, y, t)$:表面変位
- $H(x, y)$: 静止状態の流体の厚さ（水深）

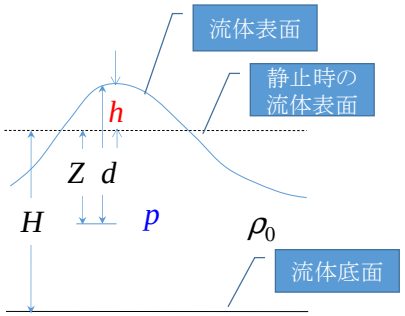
圧力，ウォーミングアップ

Q. ある場所での圧力は，その上に乗っている物体の質量×重力加速度で与えられる．地表面に1気圧の圧力がかかっている場合に，1 m^{2}の面積の上に存在する大気の質量を求めよ．ただし簡単のために，1気圧を1000 hPaとし，重力加速度を10 m/s^2 とする．なお，h（ヘクト）は100を意味するSI接頭辞で，1,000 hPa = 100,000 Pa = 100,000 N/m^{2}である．

A. [　　]

1層流体の圧力と圧力傾度

Q1. 流体表面から深さdでの圧力を求めよ．ただし流体の密度は一定で ρ_0，重力加速度はg とする．



A1. $p =$ [　　]

Q2. A1の圧力を図のh（水面の静止状態からの高さ）と，Z(静止状態の水面からの水深）とで表せ．

A2. $p =$ [　　]

Q3. A2の圧力のx微分(水平微分)を求めよ

A3. $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}$[　　] $= \rho_0 g \dfrac{\partial \square}{\partial x}$

1層流体の運動方程式

- 一つ前のスライドの圧力を，(2.1ab)式に代入すると，その式のρは今ρ_0であることに注意して，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv \cdot \boxed{} + x\text{方向の摩擦力} \qquad (2.3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu \boxed{} + y\text{方向の摩擦力} \qquad (2.3b)$$

- となる．これが1層流体の運動方程式である．
- hだけでなく，u, v もx, y, tのみの関数(深さによらない)
- 次に，摩擦力について考えよう．

摩擦力

- 摩擦力には2通りある．一つは，大気や海洋が運動して，周囲の空気や水あるいは地表面や海底から抵抗を受けて，運動を減速させるように働く摩擦力である．これはしばしば簡潔に，以下のように表され，レイリー・ダンピングと呼ばれる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \ldots. - ru, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \ldots - rv$$

- したがって，(2.3ab)の，摩擦力の項を置き換えて

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x}\boxed{} \qquad (2.4a) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g\frac{\partial h}{\partial y}\boxed{} \qquad (2.4b)$$

- もう一つは，海洋上を吹く風によって，海が引きずられることによって生じる摩擦力である．これは海洋を駆動する上で重要である．

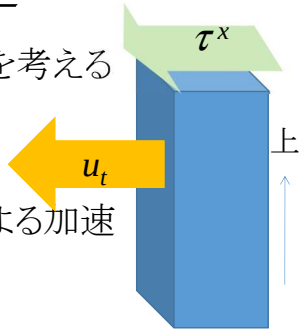
風応力による水柱の加速

- 単位面積(1 m×1 m) で深さHの水柱を考える
- 水柱の重さは$\rho_0 H$
- この水柱にかかる$\boxed{}$はτ^x

応力＝面に働く力

- 加速度＝力/質量なので，この効果による加速度は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \ldots. + \boxed{}$$



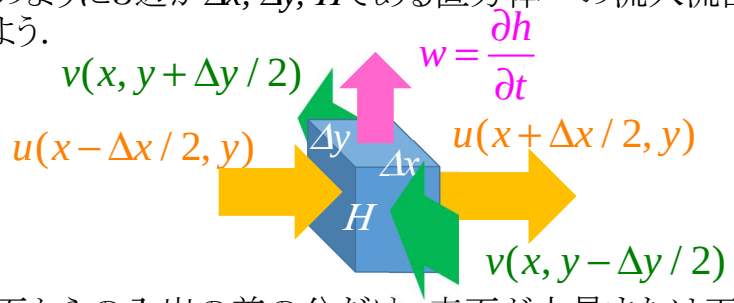
- したがって，(2.3ab)の摩擦力の項を置き換えて

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x}\boxed{} \qquad (2.5a) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g\frac{\partial h}{\partial y}\boxed{} \qquad (2.5b)$$

次にhについて考えよう．

連続の式1/2

- 一層流体では密度が一定なので，流体が圧縮されない($\boxed{}$)．この場合，体積が保存する．
- 下のように3辺がΔx, Δy, Hである直方体への流入流出を考えよう．



- 側面からの入出の差の分だけ，表面が上昇または下降する．これを差分式(Δxなどが有限の長さを持つ式．これが無限小なら$\boxed{}$式)で表せば．．．

連続の式　2/2

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta y H \left[u\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right) - u\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y\right) \right]$$

$$-\Delta x H \left[v\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right) - v\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right) \right]$$

- したがって，両辺を微小体積$\Delta x \Delta y H$で割って差分を微分で置き換えると（ノートに計算してください），

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \boxed{} \qquad (2.6)$$

- という1層流体における連続の式が得られる．
- 結局，閉じた浅水方程式系として，(2.4ab)と(2.6)，または(2.5ab)と(2.6)が得られた．

第二回まとめ

- fを$\boxed{}$といい，Ωを地球自転の角速度，θを緯度として，$f=\boxed{}$で表される．
- 密度一様な$\boxed{}$層流体の，運動方程式と連続の式からなる，閉じた方程式系を，$\boxed{}$方程式系という．
- 摩擦が，運動に伴う減速の場合，浅水方程式系の運動方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \boxed{}\boxed{}\boxed{} \qquad (2.4a) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \boxed{}\boxed{}\boxed{} \qquad (2.4b)$$

- 摩擦が風 応 力である場合には，運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x}\boxed{} \qquad (2.5a) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g\frac{\partial h}{\partial y}\boxed{} \qquad (2.5b)$$

- 連続の式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \boxed{} \qquad (2.6)$$