3. 重力波と
沿岸・赤道ケルビン波

見延　庄士郎（海洋気候物理学研究室）

予習課題
http://www.sci.hokudai.ac.jp/~minobe/class/po_clm/03_ex_propagation.pdf を(印刷)解答の上，授業冒頭で提出してください．予習のための課題なので，冒頭のみ提出を受け付けます．

また以下のyou tubeのビデオを見ておくこと．個々のビデオは全部は見ずに，雰囲気がつかめる程度見ればいいです．
大気の重力波：http://www.youtube.com/watch?v=yXnkzeCU3bE (30秒)
津波シミュレーション：http://www.youtube.com/watch?v=BUHKMIr5E1E　の3：50から日本海の津波
沿岸ケルビン波シミュレーション：https://www.youtube.com/watch?v=jSWmhkcPsHw
赤道ケルビン波，海面高度観測 https://www.youtube.com/watch?v=cCxQUqnaQnA
　(1997年1月～4月に赤道ケルビン波が伝播しエルニーニョのきっかけとなった様子)

2014年9月30日16:35

重力波見えるかな？

2014年9月30日 16:59

2014年9月30日 17:25

本日の目的

- 波は離れた場所に，物質が移動することなく，エネルギーを伝えるので，さまざまな波動現象は社会生活でも非常に重要である．
  - 電磁波：視覚（可視光），電波（TV，携帯），赤外線(ヒーター，輻射熱)
  - 音波：聴覚
- 地球流体（大気・海洋）にも，いくつかの重要な波が存在する．これらの波が離れたところにエネルギーを伝えることが，多くの大気・海洋現象で重要な役割を果たす．
- 本日は，エルニーニョ理論でも重要となる，赤道ケルビン波とその近縁である，沿岸ケルビン波，そして重力波について学ぶ．これらの波はいずれも前スライドの浅水方程式系で記述でき，その場合の伝播速度は$\sqrt{gH}$となる．
  - 扱う順序は，重力波⇒沿岸ケルビン波⇒赤道ケルビン波
- 地球流体には，もう一つロスビー波または惑星波と呼ばれる重要な波が存在する．それについては次回学ぶ．

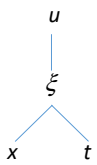
伝播方程式（一階線形偏微分方程式）の基礎1/2

- 空間一次元(x, t)の場合，$u_t+cu_x=0$の伝播方程式と呼ぶ．
- この式の特徴を理解するために，$u= u(\xi)=u(x-ct)$, $\xi=x-ct$を上式に代入し，解となることを確認しよう．
  - なお解が$u(x-ct)$で表されるということは次のスライドに示すように，x-t平面上の直線上を伝搬することを意味する．
- 右の式変形の中で，下に示す偏微分についての合成関数の微分を使う．

下付き添え字は微分の意味です．たとえば，

$$u_t=\frac{\partial}{\partial t}u,\ u_x=\frac{\partial}{\partial x}u,\ u_{tt}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$$

$u= u(\xi)=u(x-ct)$であるということは，
左図の依存関係があるので，



$$\frac{\partial}{\partial t}u(\xi)=\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{du}{d\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(\xi)=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{du}{d\xi}$$

ここで $\xi=x-ct$ なので

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\square,\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\square$$

$$u_t+cu_x$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}u(\xi)+c\frac{\partial}{\partial x}u(\square)$$

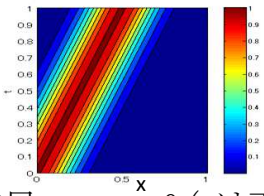
$$=\frac{\partial\square}{\partial t}\frac{du}{d\xi}+c\frac{\partial\square}{\partial x}\frac{du}{d\xi}$$

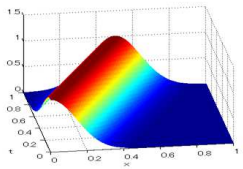
$$=\square\frac{du}{d\xi}-\square\frac{du}{d\xi}=0$$

伝播方程式（一階線形偏微分方程式）の基礎2/2

- $u=u(\xi)=u(x-ct)$で$\xi=x-ct$が解であるということは，$x-ct$=一定であれば，ξが一定で，したがって$u(\xi)$も一定となる．
- $x-ct$=一定とは，x-t平面の直線にほかならない．

左右の図は同じ情報を色塗りと(左)，俯瞰した高さと色(右)で描いている．





- 結局，$u_t+cu_x=0$（cは正の定数)という方程式は，$u(x\square)$という解をもち，その解は速度$\square$で$\square$の方向への伝播を表す．
- 同様に，$u_t-cu_x=0$（cは正の定数)という方程式は，$u(x\square)$という解をもち，その解は速度$\square$で$\square$の方向への伝播を表す．

正か負を入れる

波動方程式

- 空間二次元(x, y)の場合は $u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy})=0$ を，空間一次元(x)の場合，$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ を$\square$方程式と呼ぶ(uは未知変数，cは定数)
- 空間一次元では，xの正の方向と負の方向にそれぞれcの速度で伝播する．このことは，以下のように簡単に理解できる

$$\frac{\partial}{\partial t^2}u-c^2\frac{\partial}{\partial x^2}u=0 \text{ なら} \left(\square\right)\left(\square\right)u=0 \text{ なので}$$

- $u_t-cu_x=0$ または $u_t+cu_x=0$ が解である．
- これらは二つ前のスライドから，それぞれ，xの$\square$の方向に速度$\square$で伝播，$\square$の方向に速度$\square$で伝播する解をもつ．

正か負を入れる

伝播・波動方程式のまとめ

- $u_t+cu_x=0$ (cは正の定数)という方程式は，$u(x\ \ ct)$ という解をもち，この解は速度 で の方向への伝播を表す．
- $u_t-cu_x=0$ (cは正の定数)という方程式は，$u(x\ \ ct)$ という解をもち，この解は速度 で の方向への伝播を表す．
- 空間一次元(x)の場合，$u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ を 方程式と呼ぶ．
- この式は $u_t+cu_x=0$ または $u_t\ \ cu_x=0$ を解として持ち，それぞれ，xの の方向に速度 で伝播， の方向に速度 で伝播を表す．

出発方程式系

- 波動の基本的な性質を考える上で，運動方程式(2.4ab)にあった外力である風応力および(2.5ab)にあった摩擦力は無視しよう．したがって，出発方程式系は運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-g\frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.1a) \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-fu-g\frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.1b)$$

- および連続の式

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (2.6)再掲$$

- である．

運動方程式のスケール解析1/3

- 運動方程式(摩擦，風応力は無視，右の式)に3つ項があるけれど，場合によっては主な2項のバランスで近似できて，話が簡単になる．
- そこでどの場合にどのバランスとなるのかを，スケール解析よって調べよう．
- 現象のスケールを
  - 長さスケールL，時間スケールT，速度スケールU，

  と置く．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{U}{T},\quad fU,\quad g\frac{?}{L}$$

加速度　コリオリ　圧力傾度

バランスが成り立つように決まると考えて，積極的にスケール解析には使わない．

運動方程式のスケール解析2/3

- Q1. コリオリ項と圧力傾度項がバランス(地衡流バランス)するための，Tの条件はなにか？なお，記号≫ (ずっと大きい)を使おう．
-

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{U}{T},\quad fU,\quad g\frac{?}{L}$$

加速度　コリオリ　圧力傾度

運動方程式のスケール解析3/3

- Q1. 加速度項と圧力傾度項がバランスするための，Tの条件はなにか？

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{U}{T},\quad fU,\quad g\frac{?}{L}$$

加速度　コリオリ　圧力傾度

時間スケールが ☐ よりも十分短い．おおざっぱに言えば，☐ よりも十分短い．

時間スケールが長い場合の運動方程式

- この場合(3.1a)(3.1b)から

$v =$ ☐　　$u =$ ☐

となり，これは気象学でも学んだ ☐ 風(流) を表している．

時間スケールが短い場合の支配方程式

東向き運動方程式(3.1a)から　$u_t =$ ☐　(3.2a)

北向き運動方程式(3.1b)から　$v_t =$ ☐　(3.2b)

連続の式は(2.6)のまま　h_t ☐

- 1式1変数の式に帰着させる．そのためには，(3.2ab)の対称性から，hを残すのがよさそう．
- ∂(2.6)/∂t←(3.2ab)から未知変数にhのみを含む式が得られる

h_{tt} ☐ $= 0$　(3.3)

- これは二次元の ☐ 方程式にほかならない．

時間スケールが短い：非回転重力波

$$h_{tt} - gH\left(h_{xx} + h_{yy}\right) = 0 \qquad \text{(3.3再掲)}$$

- この波の復元力は重力であるので，この波を(☐)☐波と呼ぶ．
- 重力波には，海洋の☐波，大気の☐波などがある．
- 重力波の伝播速度は

$c =$ ☐　(3.4)

- である．
- 水深が4000 mで，重力加速度を10 m/s^2 とすると，重力波の伝播速度は☐ m/s である．

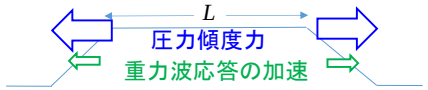
長さスケールは？

- ここまでは，時間スケールの大小を考えた．では長さスケールではどうだろうか？
- 日常生活ではコリオリ力の効果を感じることが無い一方，天気図では地衡風が重要であることから，長さスケールが大きいとコリオリ力が効き，小さいとスケールでは効かないと判断できる．
- では境目となる長さスケールは？
- それは非回転重力波が $1/f$ の時間で，伝播する距離で，[　　]と呼び，R_o で表す．

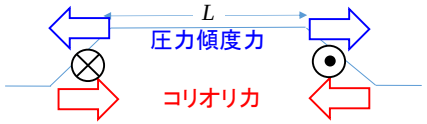
$$R_O = \boxed{} \qquad (3.5)$$

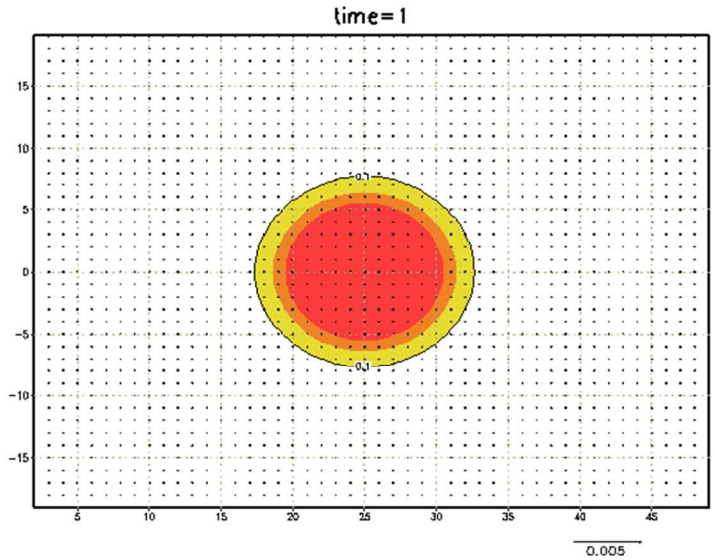
ロスビー変形半径

- 空間一次元で，長さLに渡って初期水位を与えたとする．すると盛り上がりを逃がすように，圧力傾度力の向きに流体が加速される．
- コリオリ力は無視できる $L \ll R_o$ なら，単なる波動方程式の初期値問題で，非回転重力波が左右両方向に伝搬する（稲津さんの数学授業）



- コリオリ力が重要な $L \gg R_o$ なら，外に向かう速度がコリオリ力で曲げられて，やがてコリオリ力内向きになって圧力傾度力でバランスして定常となる．

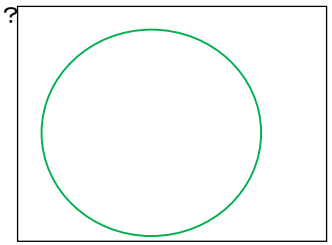




地衡流の収束・発散？（f一定の場合）

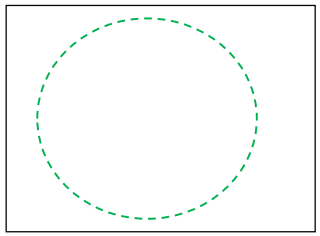
1）初期水位

2）流れは？



3）収束発散？

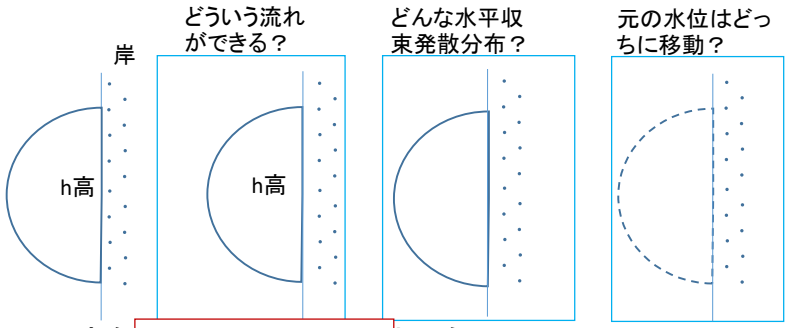
4）移動方向？



収束発散は[　　]，伝播は[　　]

岸に沿う波

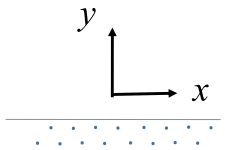
- コリオリ力によって，流体粒子の運動が曲げられる．
- しかし岸があると，岸に流が当たってしまい，異なる運動をするだろう．
- 岸にくっついて，水位が盛り上がっている状況を考えよう．コリオリが効くとどうなるか？



北半球では岸を□に見る方向に伝播しようとする

この波を□という　　次は定量的理解に式を使おう

沿岸ケルビン波の解の形



- 岸に平行な速度成分uのみ存在する（直交成分はゼロv=0）解が存在する．
- このとき速度uと水面高度hは，岸に直交する距離yについて，一定の形状をとる

$$(u,h)(x,y,t) = Y(y)(\tilde{u}(x,t),\ \tilde{h}(x,t))$$

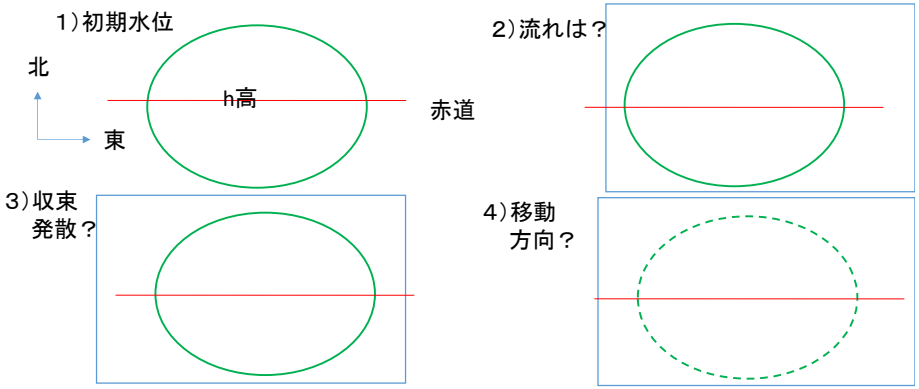
- その形状は，指数関数的減少で，その1/eになる距離はロスビーの変形半径である

$$Y = Y_0 \exp(-y/R_O)$$

- 一方，岸に平行方向には重力波の速度で，北半球では岸を右に見る向き(xの正の向き)に伝播する．

赤道に沿う波

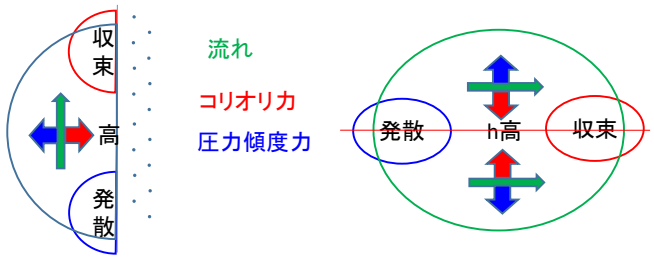
- 岸が支える沿岸ケルビン波のように，両半球の水位が互いに支えることによって，赤道にも同様の波が生じる
- この波を□と呼ぶ．



伝播は□向き．速度はやはり□

ケルビン波の補足

- 導出時の概念図では分かりやすさのために，静止状態から考えたので，岸（赤道）に直交する流れもあるように描いたが，その流れはケルビン波によるのではない．
- 純粋なケルビン波では，伝播方向の速度成分のみを持つ．



第3回のまとめ

- おおざっぱにいうと，時間スケールが ＿＿ よりも短い現象では，コリオリ項を無視することができる．その場合に重要となる波は，（＿回転）＿＿ 波である．
- 層厚がHの1層モデルでは重力波の伝播速度は ＿＿ ．
- 上の波が$1/f$の時間で伝播する距離を，＿＿＿＿ 半径と言い，これよりも大きいスケールでは一般に地衡流バランスが成り立つ．このスケールは $R_O =$ ＿＿＿＿
- 岸があることで生じる波が，＿＿＿＿ 波 で，1層モデルの伝播速度は ＿＿ で，岸を ＿ に見る方向に伝播する．
- それと近い関係にあるのが，＿＿＿＿ 波で，1層モデルの伝播速度は ＿＿ で赤道に沿って ＿ 向きに伝播する．