

予習課題提出用紙

氏名・学生番号・提出年月日そして解答を記入の上、1枚目のみ次回授業の冒頭で提出してください。予習するための課題なので、授業冒頭のみ提出を受け付けます。

氏名: _____

学生番号: _____

_____ 年 月 提出

今回は正答はwebにありません。ただし、偏微分が分かっているなら、3枚目のスライドをよく理解すれば正答できるでしょう。

また以下のNASA 作成のビデオを見ておくこと。

Ekman Spiral: How El Niño Impacts Marine Plant Life

<https://www.youtube.com/watch?v=sh2KhliHD9A> (58秒)

1

ラプラシアンを求めよう。

問い: (x, y) 空間における関数 $u(x, y)$ のラプラシアンは

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$$

で与えられる。以下の関数のラプラシアンを求め、 $(x, y) = (0, 0)$ でラプラシアンがゼロ・正・負いずれであるかを答えよ(いずれも四角に書き込むこと)。ぱっと分からない人は次スライドの例題を見よう。

(1) $u(x, y) = x + y$ $u_{xx} + u_{yy} =$ $\Delta u(0, 0)$ は

(2) $u(x, y) = x^2 + y^2$ $u_{xx} + u_{yy} =$ $\Delta u(0, 0)$ は

(3) $u(x, y) = x^2 - y^2$ $u_{xx} + u_{yy} =$ $\Delta u(0, 0)$ は

(4) $u(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ $u_{xx} + u_{yy} =$ $\Delta u(0, 0)$ は

問い: 各関数の外形が次の次のスライドにある。それを参考にして、ある地点でのラプラシアンが正であるのは、そこでの値が周囲の値よりも低い(へこんでいる)場合か、高い(でっぱっている)場合かを答えよ。

解答: ある地点でのラプラシアンが正であるのは、そこでの関数の値が周囲の値よりも

場合である。

2

ラプラシアンを求める例 (微分される部分に色をつけています)

$u(x, y) = xy$ のラプラシアンを求めるには

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (xy) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (xy) \right] = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} x \\&= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

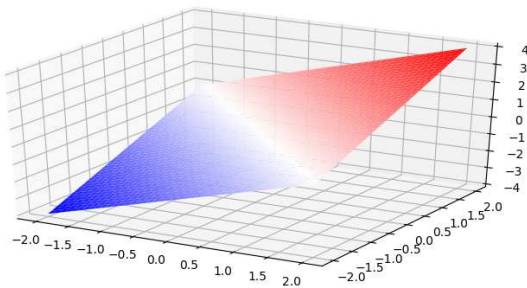
$u(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ のラプラシアンを求めるには

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sin(x) \sin(y)) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\sin(x) \sin(y)) \right] \\&= \frac{\partial}{\partial x} [\cos(x) \sin(y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\sin(x) \cos(y)] \\&= -\sin(x) \sin(y) - \sin(x) \sin(y) = -2 \sin(x) \sin(y)\end{aligned}$$

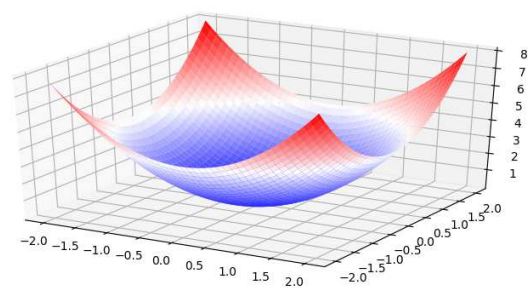
3

問題に出した関数の概形

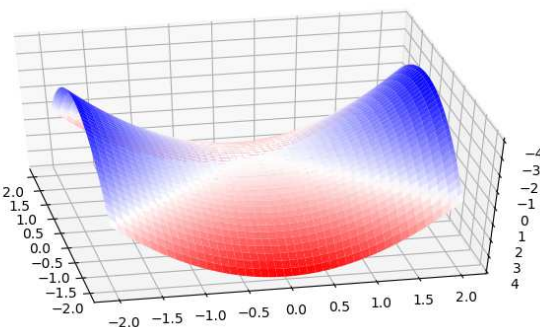
(1) $u(x, y) = x + y$



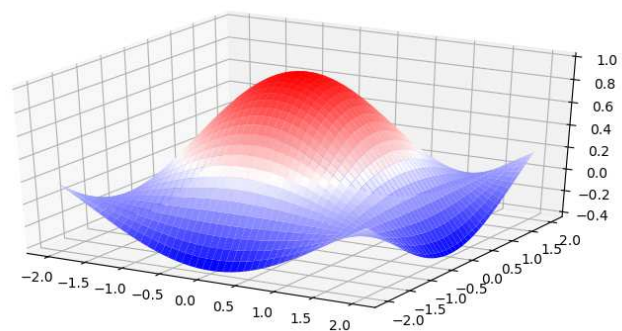
(2) $u(x, y) = x^2 + y^2$



(3) $u(x, y) = x^2 - y^2$



(4) $u(x, y) = \cos(x) \cos(y)$



4

おまけ, 前スライドの図を作成したpythonスクリプト(自分でも見てみたい(別な角度など) 人がいれば)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

x1d=np.arange(-2., 2.01, 0.01)
(xs,ys)=np.meshgrid(x1d,x1d)
func1=xs+ys
func2=xs**2+ys**2
func3=xs**2-ys**2
func4=np.cos(xs)*np.cos(ys)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(221, projection='3d')
ax.plot_surface(xs, ys, func1, cmap='bwr', linewidth=0)

ax = fig.add_subplot(222, projection='3d')
ax.plot_surface(xs, ys, func2, cmap='bwr', linewidth=0)

ax = fig.add_subplot(223, projection='3d')
ax.plot_surface(xs, ys, func3, cmap='bwr', linewidth=0)

ax = fig.add_subplot(224, projection='3d')
ax.plot_surface(xs, ys, func4, cmap='bwr', linewidth=0)

fig.show()
```