ベクトル演算を用いた，スマートなコリオリ力の導出

見延　庄士郎

慣性系（静止系でも可）を添え字 i で，回転系を添え字 r で表す．回転角速度をΩとする．慣性系で観測する運動は，回転系で観測する運動と系の回転による運動の和なので，$\vec{v}_i = \vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r}$ となる．速度は位置ベクトルの時間微分なので，$\dfrac{d}{dt_i}\vec{r} = \dfrac{d}{dt_r}\vec{r} + \vec{\Omega}\times\vec{r}$ である．このことから，微分演算が $\dfrac{d}{dt_i} = \dfrac{d}{dt_r} + \vec{\Omega}\times$ と置き換えられることが分かる．そこで，加速度についてこの置き換えを行うと，

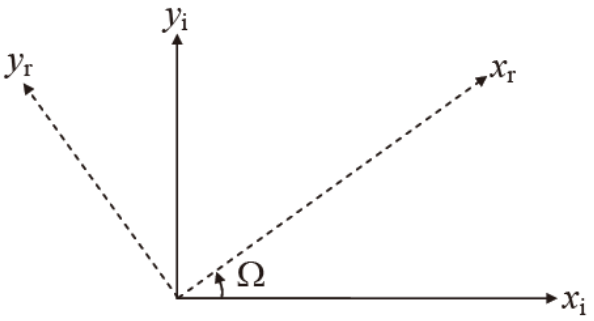

図１．慣性系(i)と回転系(r)の模式図．

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_i}{dt_i} &= \frac{d\vec{v}_i}{dt_r} + \vec{\Omega}\times v_i \\
&= \frac{d}{dt_r}\left(\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\Omega}\times\left(\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + \vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt_r} + \vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \frac{d\vec{v}_r}{dt_r} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r + \cancel{\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)}
\end{aligned}
$$

となる．第二項がコリオリ項である．第三項は遠心力であるが，通常重力に含めるので無視する．

成分表示を求めるために，ベクトルの外積の成分表示を

$$
\begin{aligned}
2\vec{\Omega}\times\vec{v}_r &= 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \Omega\cos\theta & \Omega\sin\theta \\ u_r & v_r & w_r \end{vmatrix} \\
&= 2(\cancel{w_r}\Omega\cos\theta - v_r\Omega\sin\theta)\vec{i} + 2u_r\Omega\sin\theta\vec{j} - 2u_r\Omega\cos\theta\cancel{\vec{k}}
\end{aligned}
$$

ここで，w_r は小さいから無視し，また鉛直方向（$\vec{k}$ の成分）は重力に比べて小さいので無視している．したがって，成分ごとの表示では，

$$\frac{du_i}{dt_i} = \frac{du_r}{dt_r} - 2\Omega \sin\theta v_r \quad , \quad \frac{dv_i}{dt_i} = \frac{dv_r}{dt_r} + 2\Omega \sin\theta u_r$$

となる．ここで共通に見られる 2Ωsinθを，簡潔な表現のためにコリオリ・パラメータと置く．つまり， $f \equiv 2\Omega \sin\theta$ とすれば，上式は

$$\frac{du_i}{dt_i} = \frac{du_r}{dt_r} - fv_r , \quad \frac{dv_i}{dt_i} = \frac{dv_r}{dt_r} + fu_r$$

となる．したがって，慣性系で力が加わらない運動を回転系で見ると，

$$\frac{du_r}{dt_r} = fv_r , \quad \frac{dv_r}{dt_r} = -fu_r$$

という加速運動，つまりあたかも力が加わったように見える．